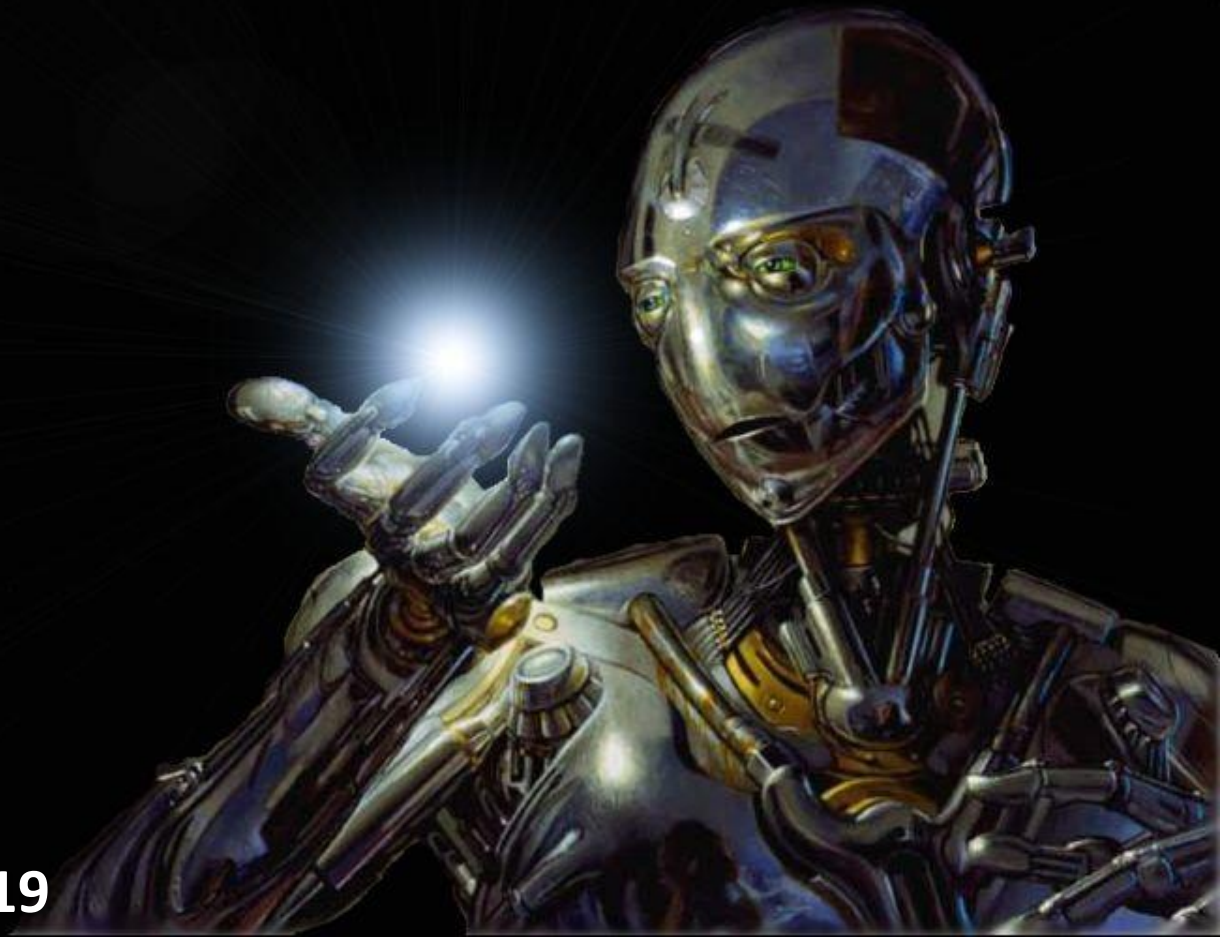


INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL

Parte 10

Lógica *Fuzzy*



1

Lógica Fuzzy

1 – Lógica Fuzzy

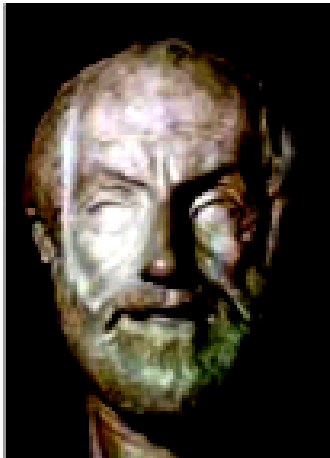
1.1 – Introdução:

- **Lógica** é a ciência que estuda e modela as leis do raciocínio humano.
- A **Lógica Proposicional** mostra-se como um importante auxílio na automatização do raciocínio, porém é insuficiente para a representação de problemas complexos onde é necessário considerar valores intermediários entre **verdadeiro** e **falso**.

1 – Lógica Fuzzy

1.1 – Introdução:

- **Lógica Clássica de Aristóteles**
a.C.: Princípio da Bivalência



384 a.C. – 322 a.C.

“Tudo deve ser ou não ser...”
— Aristóteles

1 – Lógica Fuzzy

1.1 – Introdução:

- Lógica Clássica de Aristóteles

Elementos *pertencem* ou *não pertencem* a um dado conjunto A em um universo X , ou seja,

$$\begin{aligned} f_A(x) &= 1 && \text{se e somente se } x \in A \\ &= 0 && \text{se e somente se } x \notin A \end{aligned}$$

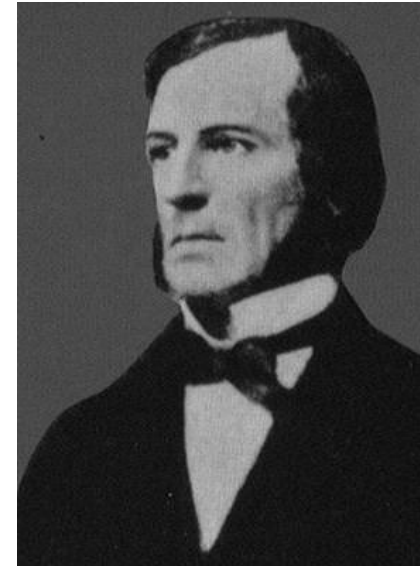
onde $f_A(x)$ é a função característica do conjunto.

1 – Lógica Fuzzy

1.1 – Introdução:

- **Lógica Booleana** faz uso de variáveis e constantes formando um conjunto discreto e finito, que unicamente podem assumir dois valores: **1** ou **0**, representando ***Sim*** ou ***Não***.

$$\mu_A(X) = \begin{cases} 1, & \text{Se } X \in A \\ 0, & \text{Se } X \notin A \end{cases}$$



George Boole (1815-1864)

1 – Lógica Fuzzy

1.1 – Introdução:

- **Lógica Booleana** faz uso de variáveis e constantes formando um conjunto discreto e finito, que unicamente podem assumir dois valores: **1** ou **0**, representando ***Sim*** ou ***Não***.

$$\mu_A(x): X \rightarrow \{0,1\}$$

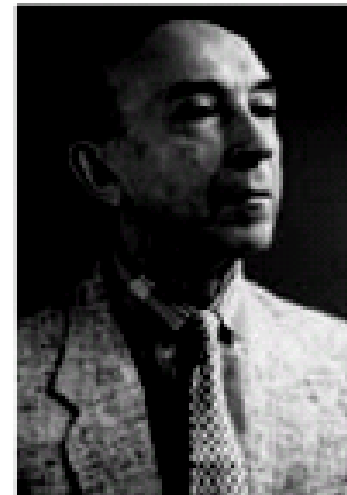
1 – Lógica Fuzzy

1.1 – Introdução:

- **Lógica *Fuzzy* (nebulosa)** é a ciência que estuda e modela o *modo aproximado* do raciocínio humano. Considera a possibilidade de algo **ser e não ser** ao mesmo tempo.

1965: Lógica Fuzzy (Zadeh)

“Elementos pertencem a um certo conjunto com diferentes graus de pertinência.”



1 – Lógica Fuzzy

1.1 – Introdução:

- **Lógica *Fuzzy* (nebulosa)** é a ciência que estuda e modela o *modo aproximado* do raciocínio humano. Considera a possibilidade de algo **ser e não ser** ao mesmo tempo.

Um conjunto fuzzy A em um universo X é definido por uma função de pertinência:

$$\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]$$

1 – Lógica Fuzzy

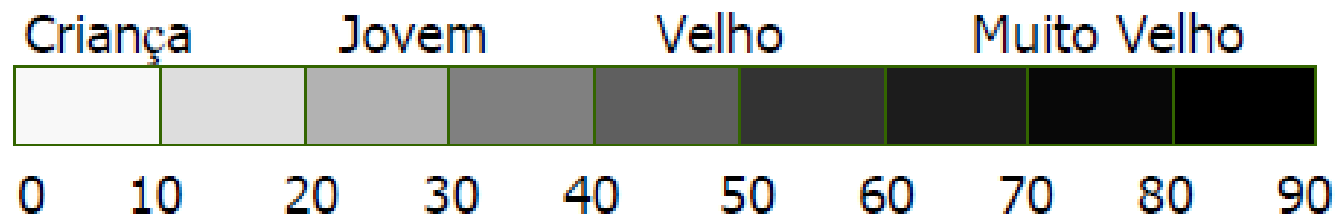
1.1 – Introdução:

- **Lógica *Fuzzy*** é uma técnica inteligente que tem como objetivo modelar o modo aproximado de raciocínio, imitando a habilidade humana de tomar decisões em um ambiente de incerteza e imprecisão.
 - Exemplos: Risco de um investimento, limiares de temperatura, maturidade de uma pessoa, intensidade de fluxos, etc.
- Permite que sistemas inteligentes de controle e suporte à decisão lidem com informações imprecisas ou nebulosas.

1 – Lógica Fuzzy

1.1 – Introdução:

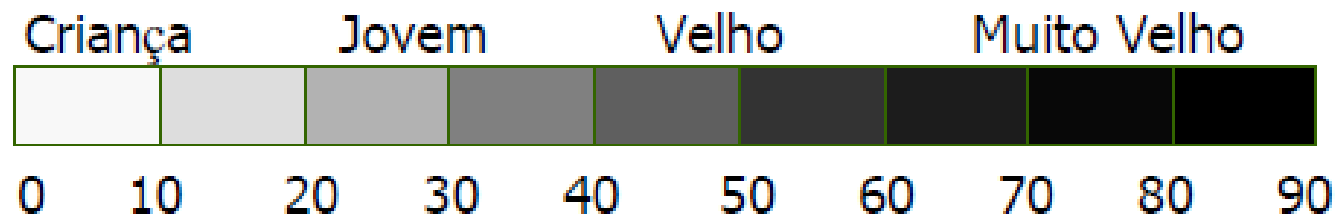
- Exemplo de aplicação: *qual é a idade que define se uma pessoa é jovem ou velha?*



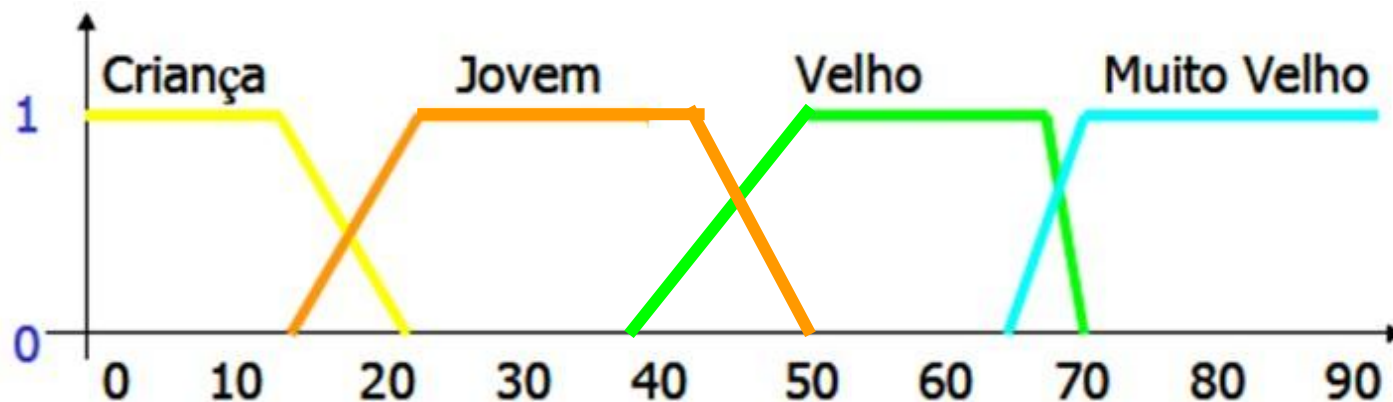
1 – Lógica Fuzzy

1.1 – Introdução:

- Exemplo de aplicação: *qual é a idade que define se uma pessoa é jovem ou velha?*



- Fuzificação:** define-se os graus de pertinência:



1 – Lógica Fuzzy

1.1 – Introdução:

- **Lógica *Fuzzy*** é aplicada em problemas onde o conhecimento envolve conceitos subjetivos e intrinsecamente imprecisos, e onde deseja-se obter explicações sobre o resultado do problema.
- **Fuzificação** é o processo de transformar números reais em uma representação ***Fuzzy***, com o objetivo de expressá-lo como uma medida de imprecisão.

1 – Lógica Fuzzy

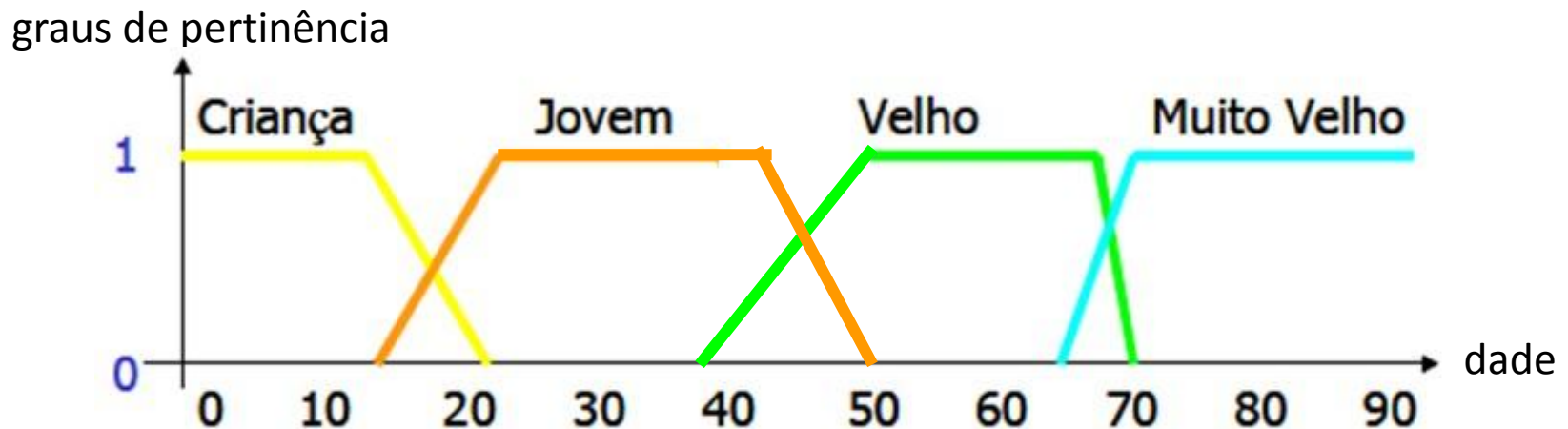
1.2 – Grau de Pertinência:

- É o **nível de compatibilidade** (incerteza) de um elemento do conjunto com o conceito semântico deste conjunto.
- No contexto da **Lógica Fuzzy**, o grau de pertinência descreve propriedades que têm valores contínuos, associando as partições desses valores com um conceito semântico.
 - Essas partições podem, e devem, coincidir (*overlap*) para modelagem da ambiguidade.

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

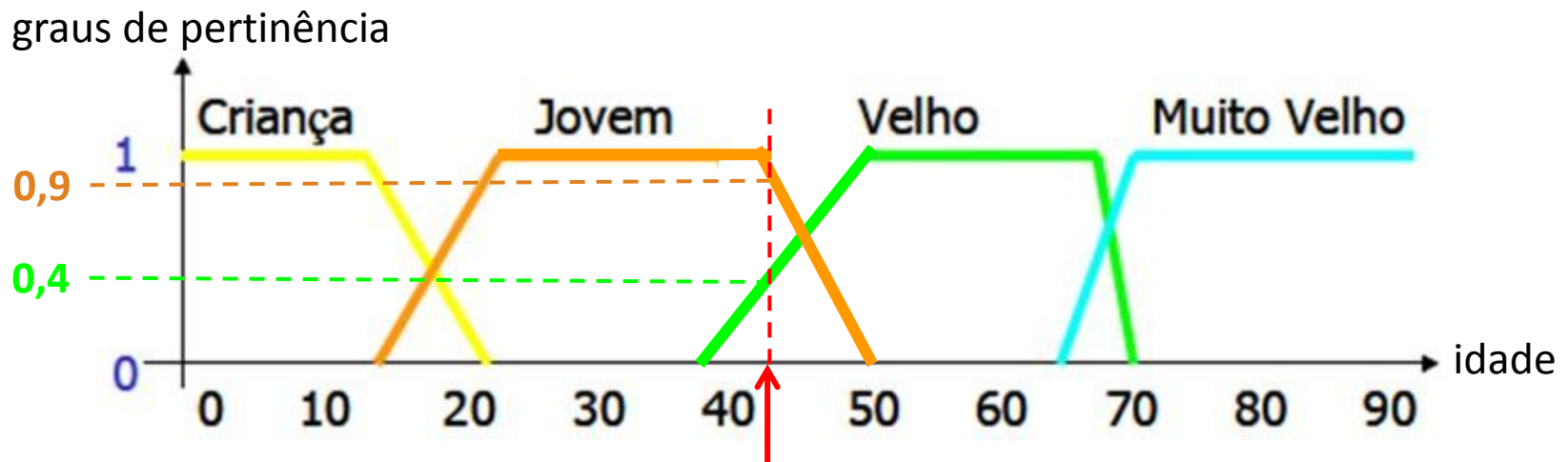
- Exemplo de aplicação: *Fabiana, com 43 anos, é velha?*



1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- Exemplo de aplicação: *Fabiana, com 43 anos, é velha?*



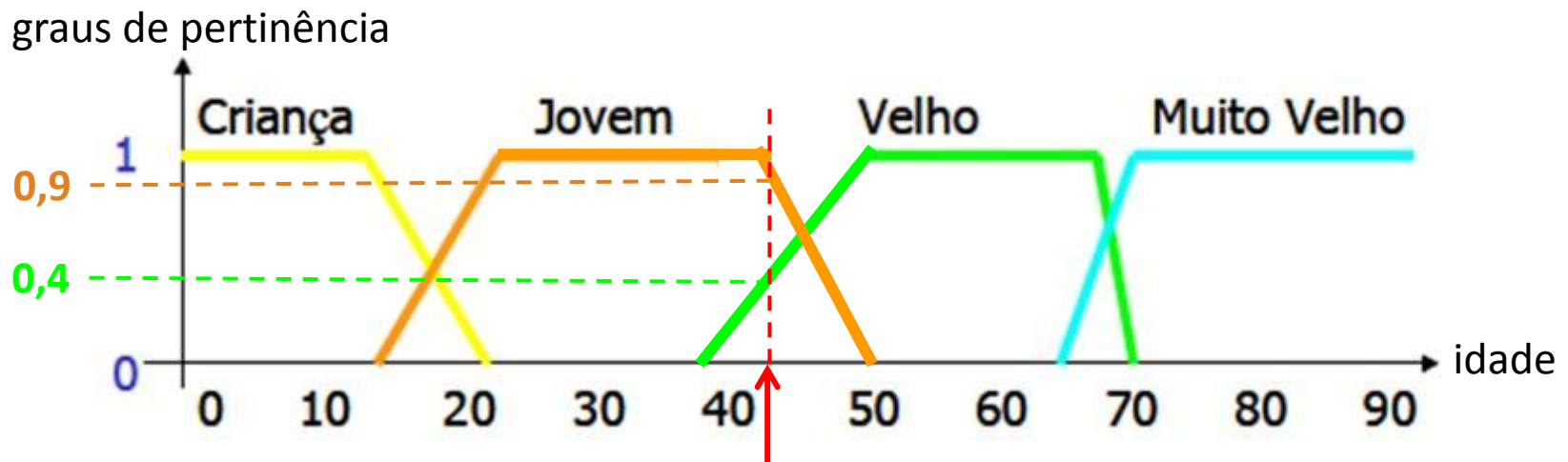
1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- Exemplo de aplicação: *Fabiana, com 43 anos, é velha?*

*Fabiana tem grau de pertinência 0,4 para velho e 0,9 para jovem. Assim, **Fabiana é mais jovem do que velha!***

Fabiana é jovem e velha ao mesmo tempo, porém com graus de pertinência diferentes.



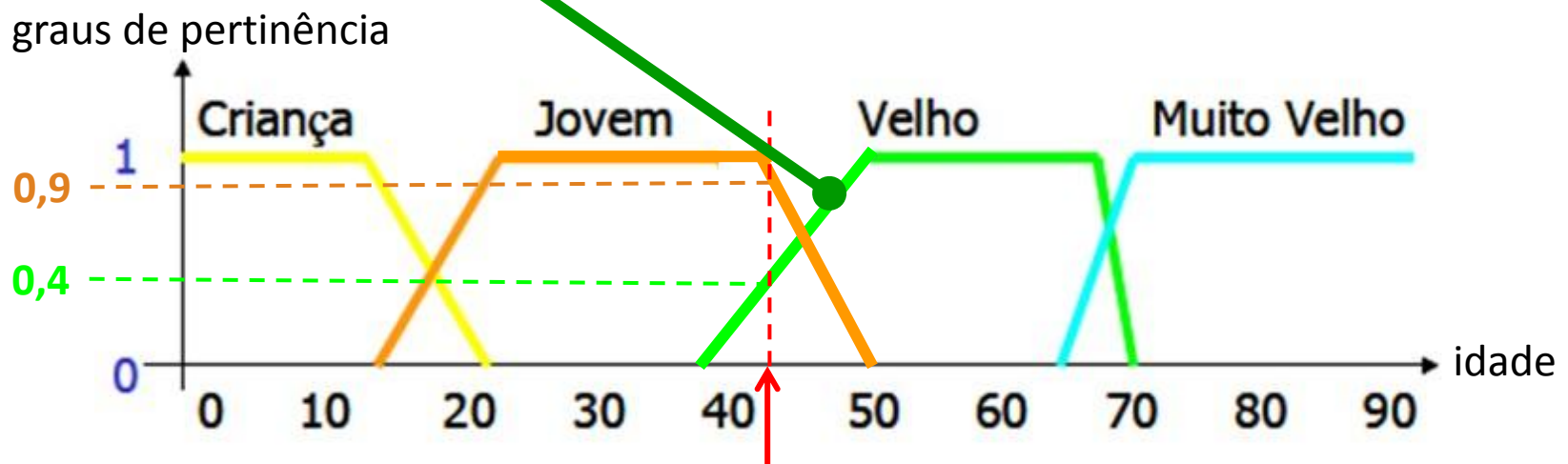
1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- Exemplo de aplicação: *Fabiana, com 43 anos, é velha?*

Cálculo para Fuzzificação:

$$\text{LINEAR CRESCENTE: } \mu_A(x) = (x - x_1)/(x_2 - x_1)$$



1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- Exemplo de aplicação: *Fabiana, com 43 anos, é velha?*

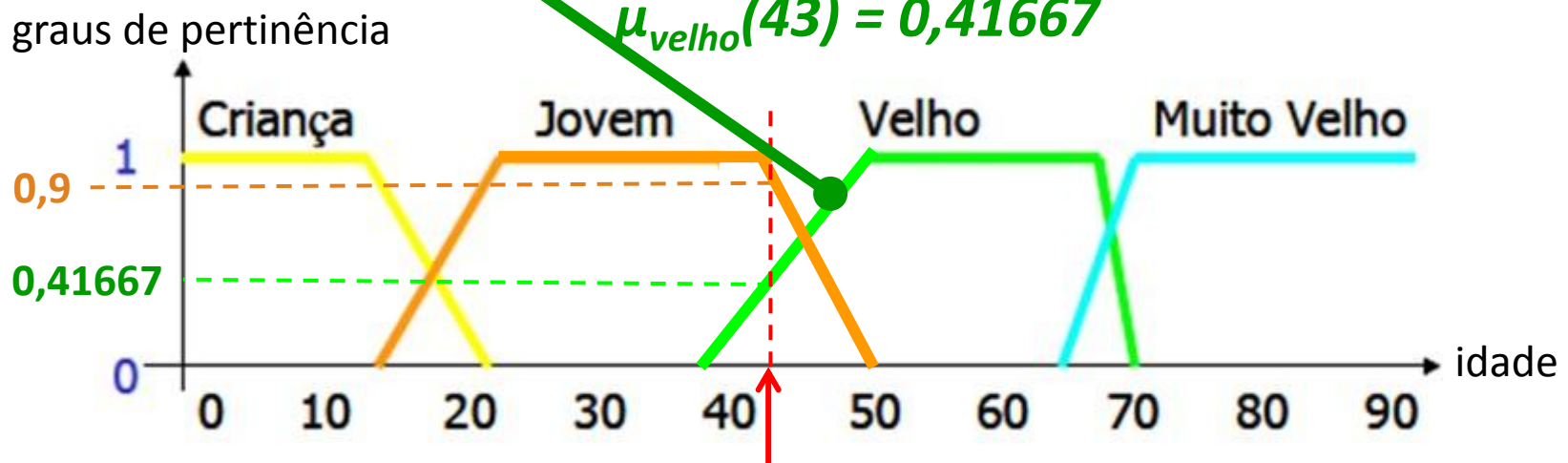
Cálculo para Fuzzificação:

$$\text{LINEAR CRESCENTE: } \mu_A(x) = (x - x_1) / (x_2 - x_1)$$

$$\mu_{\text{velho}}(43) = (43 - 38) / (50 - 38)$$

$$\mu_{\text{velho}}(43) = 5 / 12$$

$$\mu_{\text{velho}}(43) = 0,41667$$



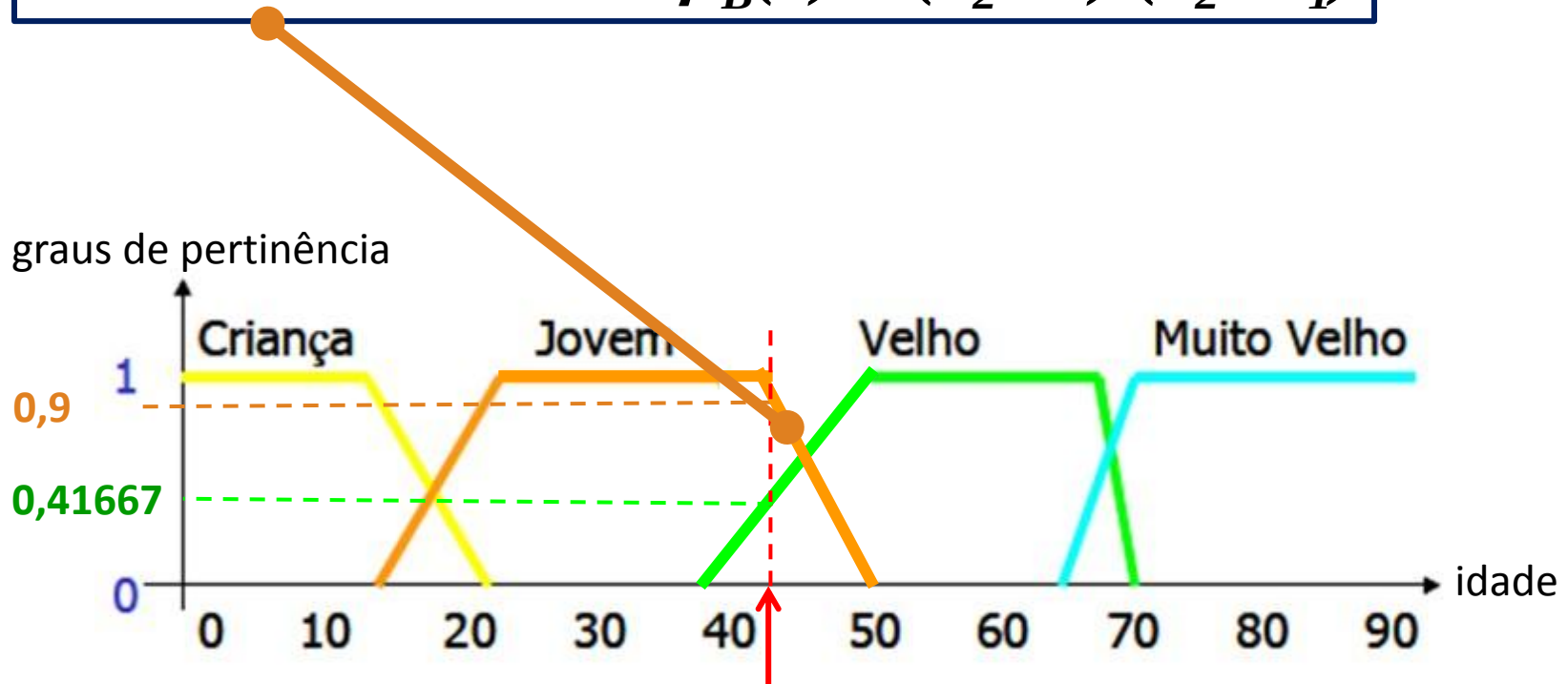
1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- Exemplo de aplicação: *Fabiana, com 43 anos, é velha?*

Cálculo para Fuzzificação:

$$\text{LINEAR DECRESCENTE: } \mu_B(x) = (x_2 - x)/(x_2 - x_1)$$



1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- Exemplo de aplicação: *Fabiana, com 43 anos, é velha?*

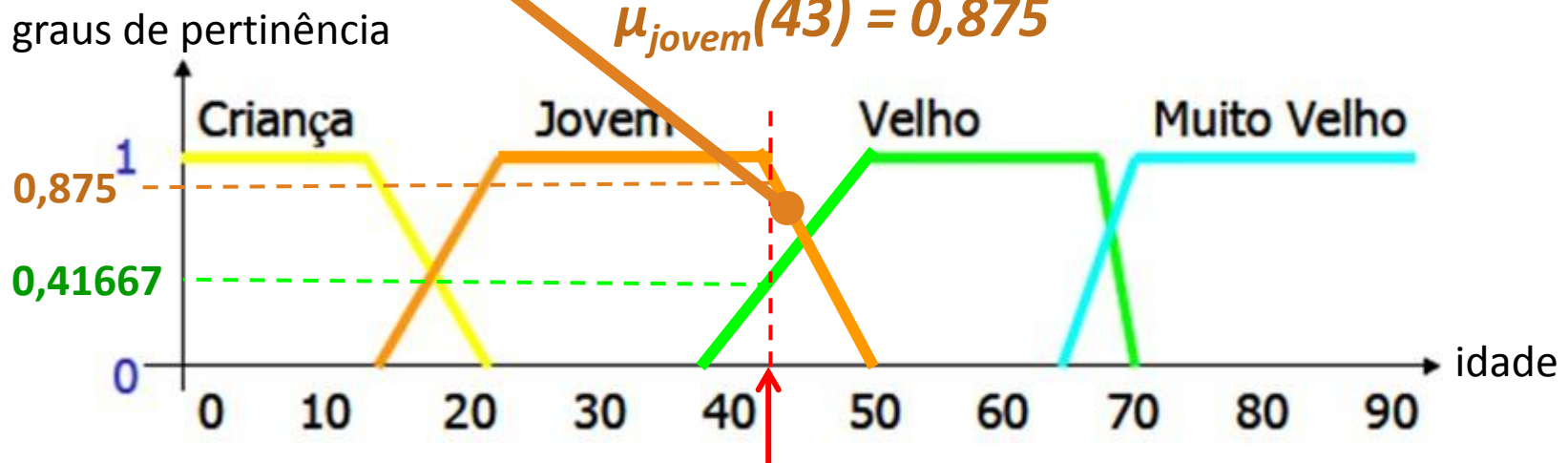
Cálculo para Fuzzificação:

$$\text{LINEAR DECRESCENTE: } \mu_B(x) = (x_2 - x) / (x_2 - x_1)$$

$$\mu_{jovem}(43) = (50 - 43) / (50 - 42)$$

$$\mu_{jovem}(43) = 7 / 8$$

$$\mu_{jovem}(43) = 0,875$$



1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Probabilidade**, a pertinência explica eventos que ocorrem em um espaço aleatório.
 - É baseada em um espaço de amostras e não em instâncias individuais.
 - Antes de selecionar um elemento de uma certa população sabe-se as chances do evento ocorrer.
 - Após selecionar o elemento, não existe mais a probabilidade (a incerteza).

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Probabilidade**:
 - *Exemplo: Para fazer o drink “Cuba Livre” deve-se misturar refrigerante à base de Cola, Run e Gelo, sendo:*
 - *Refrigerante pode ser Coca-Cola (50ml a 60ml) ou Pepsi-Cola (60ml a 70ml), Run (10ml a 30ml) e Gelo (20ml).*
 1. *Qual a probabilidade de encontrarmos Coca-Cola neste drink?*
 2. *Qual a probabilidade de encontrarmos Run neste drink?*
 3. *Qual a probabilidade de encontrarmos Gelo neste drink?*
 4. *Qual a probabilidade de encontrarmos Guaraná neste drink?*

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Probabilidade**:
 - *Exemplo: Para fazer o drink “Cuba Livre” deve-se misturar refrigerante à base de Cola, Run e Gelo, sendo:*
 - *Refrigerante pode ser Coca-Cola (50ml a 60ml) ou Pepsi-Cola (60ml a 70ml), Run (10ml a 30ml) e Gelo (20ml).*
 1. *Qual a probabilidade de encontrarmos Coca-Cola neste drink?* **50%**
 2. *Qual a probabilidade de encontrarmos Run neste drink?* **100%**
 3. *Qual a probabilidade de encontrarmos Gelo neste drink?* **100%**
 4. *Qual a probabilidade de encontrarmos Guaraná neste drink?* **0%**

1 – Lógica Fuzzy

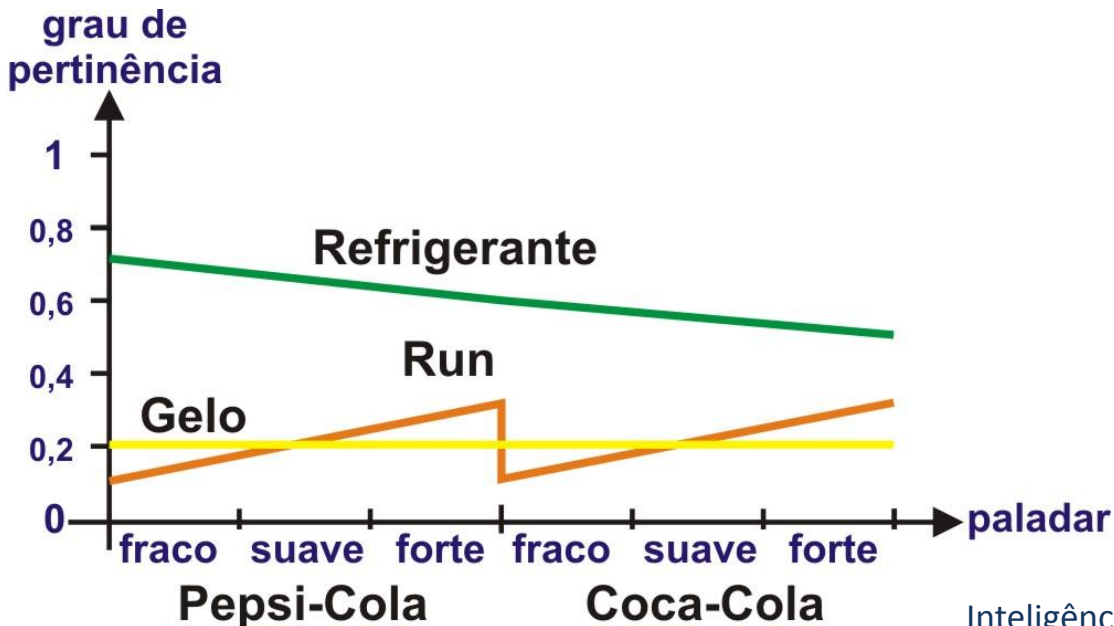
1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Lógica Fuzzy**:
 - *Exemplo: Para fazer o drink “Cuba Livre” deve-se misturar refrigerante à base de Cola, Run e Gelo, sendo:*
 - *Refrigerante pode ser Coca-Cola (50ml a 60ml) ou Pepsi-Cola (60ml a 70ml), Run (10ml a 30ml) e Gelo (20ml).*

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

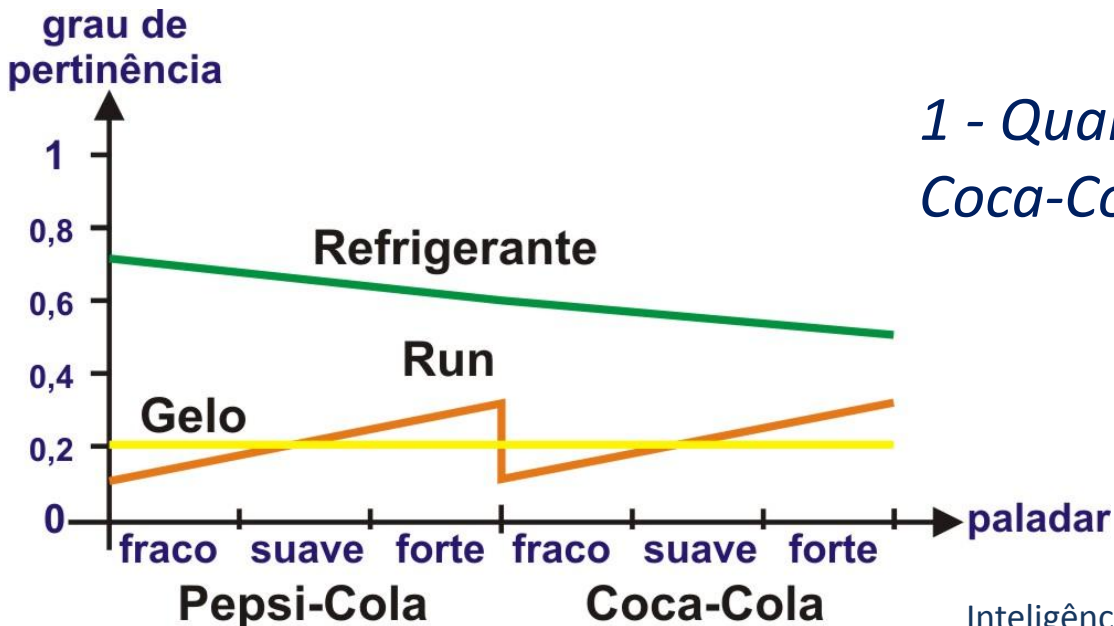
- No contexto da **Lógica Fuzzy**:
 - Exemplo: Para fazer o drink “Cuba Livre” deve-se misturar refrigerante à base de Cola, Run e Gelo, sendo:
 - Refrigerante pode ser Coca-Cola (50ml a 60ml) ou Pepsi-Cola (60ml a 70ml), Run (10ml a 30ml) e Gelo (20ml).



1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Lógica Fuzzy**:
 - Exemplo: Para fazer o drink “Cuba Livre” deve-se misturar refrigerante à base de Cola, Run e Gelo, sendo:
 - Refrigerante pode ser Coca-Cola (50ml a 60ml) ou Pepsi-Cola (60ml a 70ml), Run (10ml a 30ml) e Gelo (20ml).

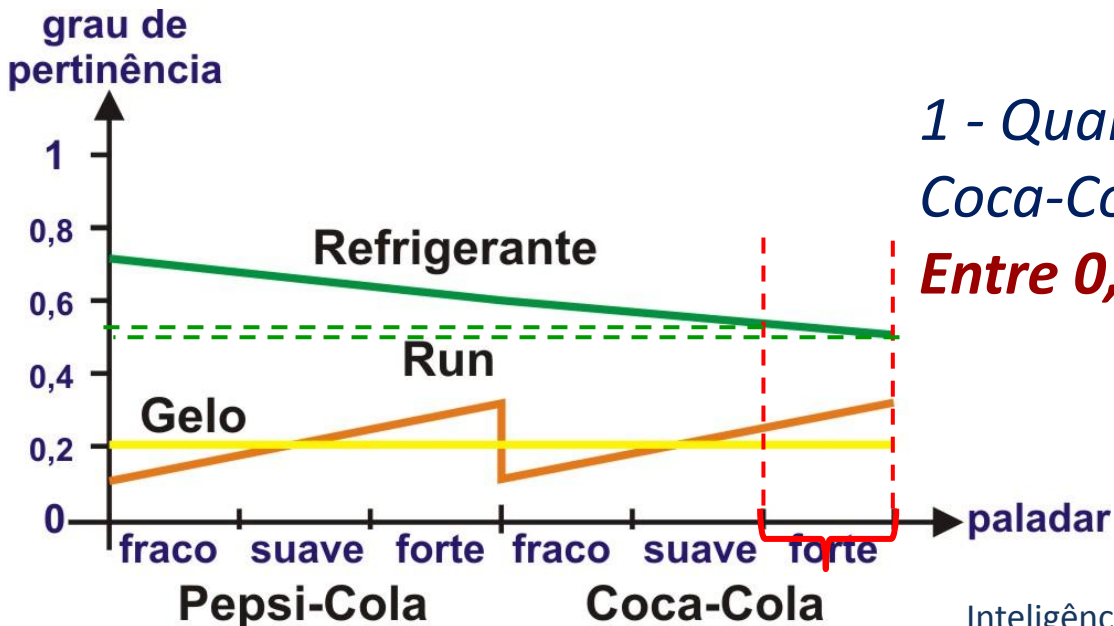


1 - Qual grau de pertinência de Coca-Cola para um drink forte?

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Lógica Fuzzy**:
 - Exemplo: Para fazer o drink “Cuba Livre” deve-se misturar refrigerante à base de Cola, Run e Gelo, sendo:
 - Refrigerante pode ser Coca-Cola (50ml a 60ml) ou Pepsi-Cola (60ml a 70ml), Run (10ml a 30ml) e Gelo (20ml).

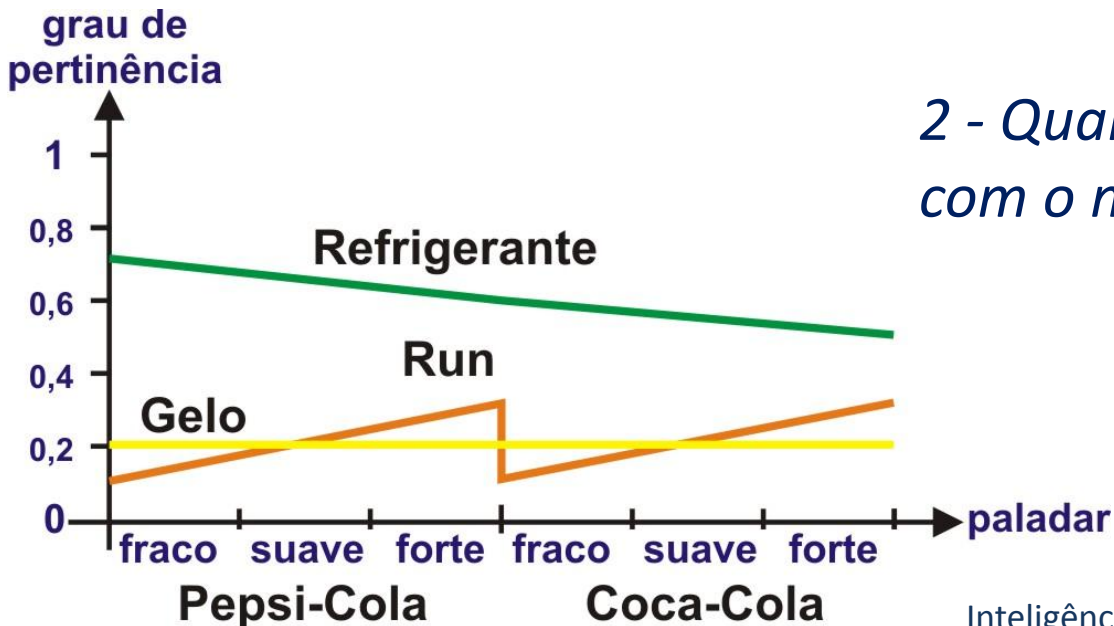


1 - Qual grau de pertinência de Coca-Cola para um drink forte?
Entre 0,5 e 0,55 aproximadamente

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Lógica Fuzzy**:
 - Exemplo: Para fazer o drink “Cuba Livre” deve-se misturar refrigerante à base de Cola, Run e Gelo, sendo:
 - Refrigerante pode ser Coca-Cola (50ml a 60ml) ou Pepsi-Cola (60ml a 70ml), Run (10ml a 30ml) e Gelo (20ml).

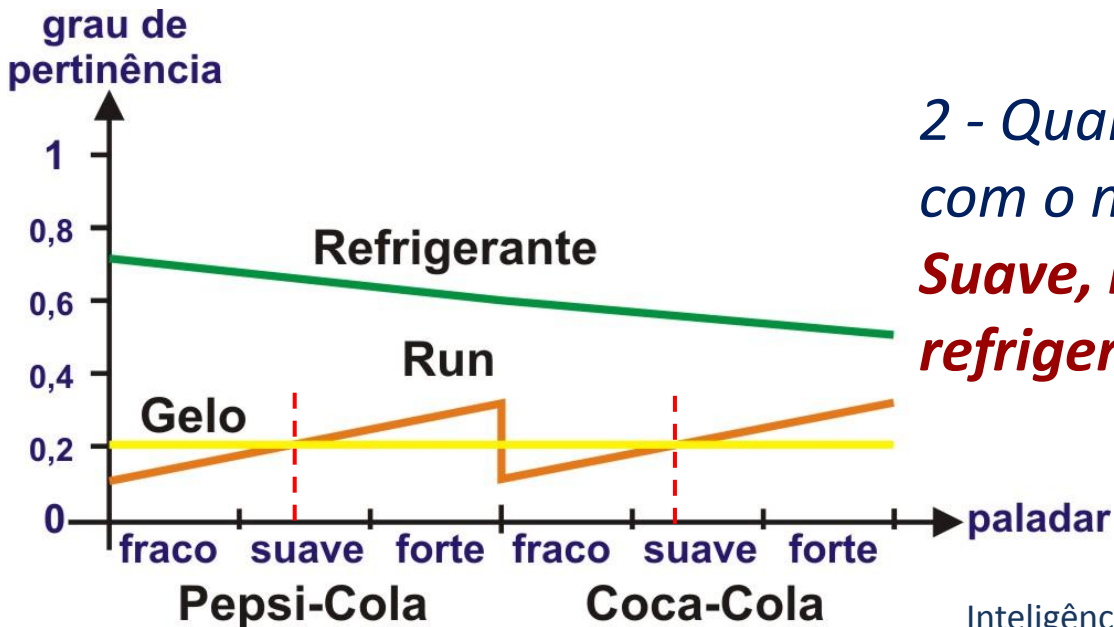


2 - Qual o paladar para Run e Gelo com o mesmo grau de pertinência?

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Lógica Fuzzy**:
 - Exemplo: Para fazer o drink “Cuba Livre” deve-se misturar refrigerante à base de Cola, Run e Gelo, sendo:
 - Refrigerante pode ser Coca-Cola (50ml a 60ml) ou Pepsi-Cola (60ml a 70ml), Run (10ml a 30ml) e Gelo (20ml).

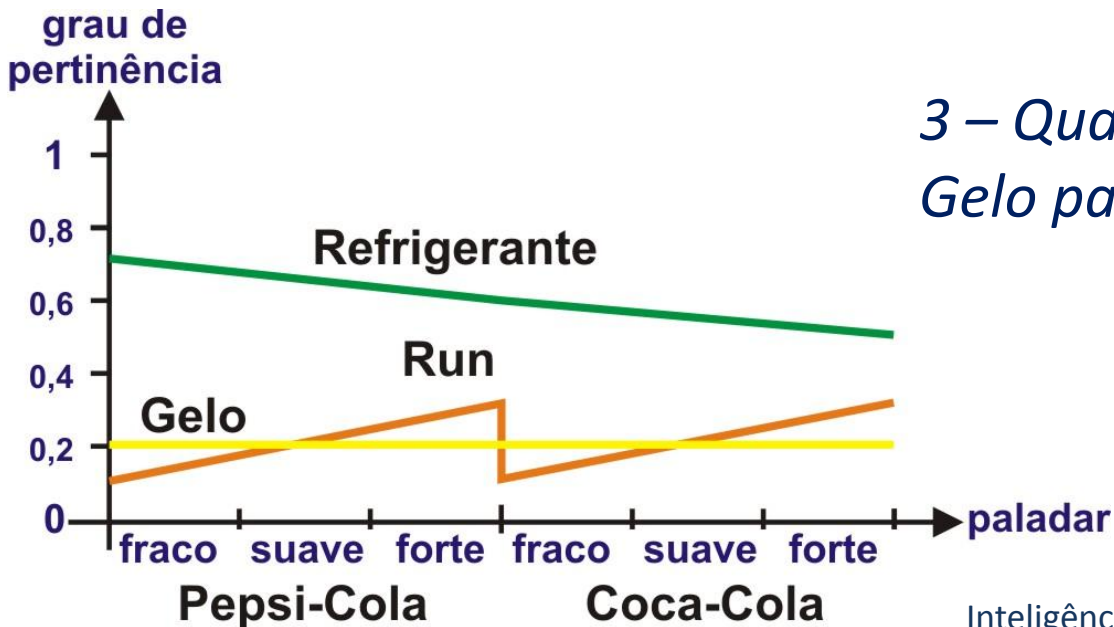


2 - Qual o paladar para Run e Gelo com o mesmo grau de pertinência?
Suave, independente do refrigerante escolhido.

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Lógica Fuzzy**:
 - Exemplo: Para fazer o drink “Cuba Livre” deve-se misturar refrigerante à base de Cola, Run e Gelo, sendo:
 - Refrigerante pode ser Coca-Cola (50ml a 60ml) ou Pepsi-Cola (60ml a 70ml), Run (10ml a 30ml) e Gelo (20ml).

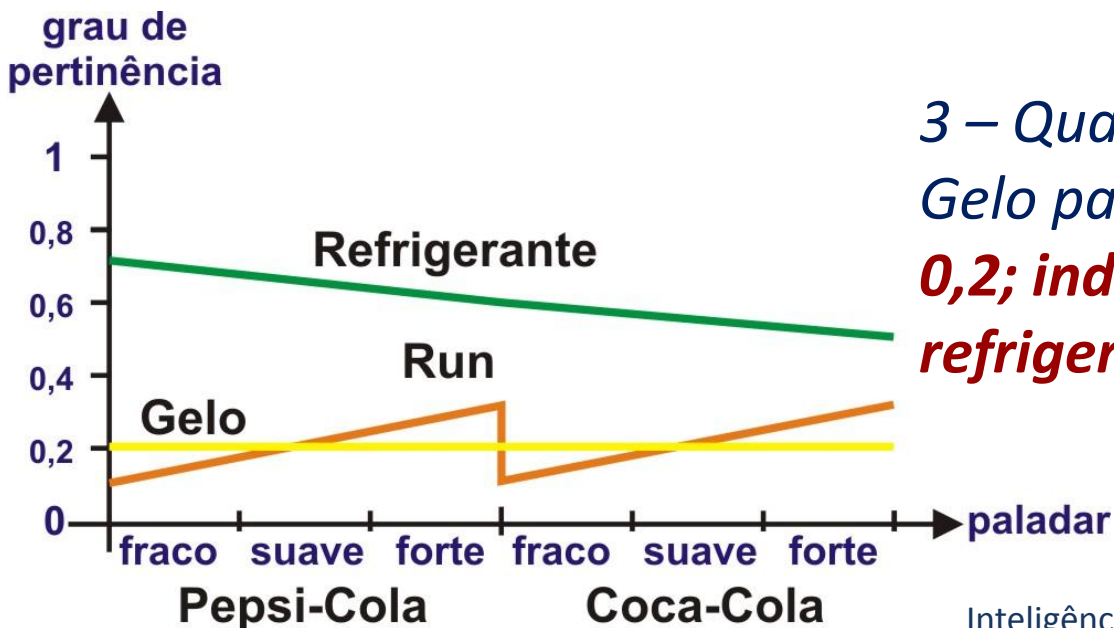


3 – Qual o grau de pertinência de Gelo para este drink?

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Lógica Fuzzy**:
 - Exemplo: Para fazer o drink “Cuba Livre” deve-se misturar refrigerante à base de Cola, Run e Gelo, sendo:
 - Refrigerante pode ser Coca-Cola (50ml a 60ml) ou Pepsi-Cola (60ml a 70ml), Run (10ml a 30ml) e Gelo (20ml).



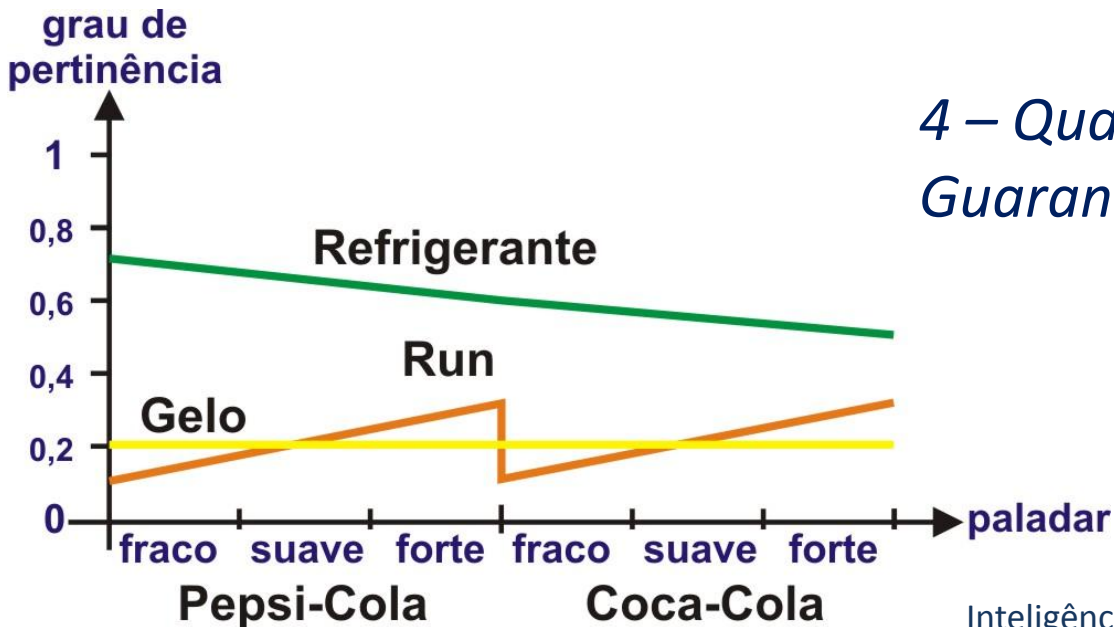
3 – Qual o grau de pertinência de Gelo para este drink?

0,2; independente do paladar e do refrigerante escolhido.

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Lógica Fuzzy**:
 - Exemplo: Para fazer o drink “Cuba Livre” deve-se misturar refrigerante à base de Cola, Run e Gelo, sendo:
 - Refrigerante pode ser Coca-Cola (50ml a 60ml) ou Pepsi-Cola (60ml a 70ml), Run (10ml a 30ml) e Gelo (20ml).

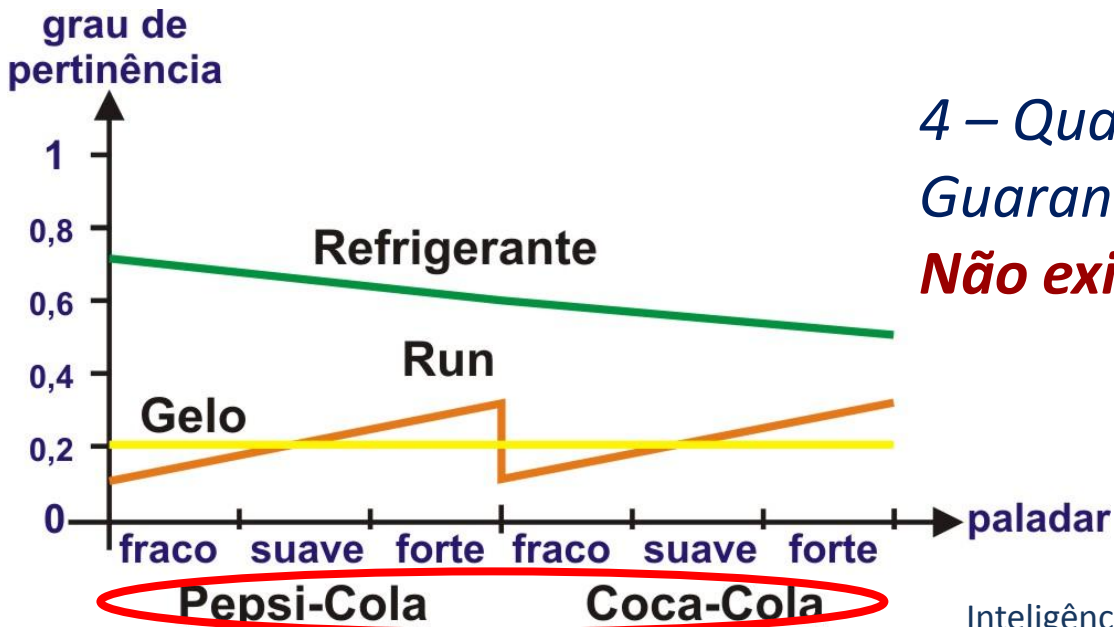


4 – Qual o grau de pertinência de Guaraná para este drink?

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Lógica Fuzzy**:
 - Exemplo: Para fazer o drink “Cuba Livre” deve-se misturar refrigerante à base de Cola, Run e Gelo, sendo:
 - Refrigerante pode ser Coca-Cola (50ml a 60ml) ou Pepsi-Cola (60ml a 70ml), Run (10ml a 30ml) e Gelo (20ml).



4 – Qual o grau de pertinência de Guaraná para este drink?

Não existe.

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Lógica Fuzzy**, o que significa dizer:
 - Gabriela é alta com grau de pertinência 0,85.
- No contexto da **Probabilidade**, o que significa dizer:
 - Gabriela tem a probabilidade 0,85 de ser alta.

1 – Lógica Fuzzy

1.2 – Grau de Pertinência:

- No contexto da **Lógica Fuzzy**, o que significa dizer:
 - Gabriela é alta com grau de pertinência 0,85.

Gabriela é bem compatível com uma pessoa alta, pois possui 0,85 de grau de pertinência para a característica alta.
- No contexto da **Probabilidade**, o que significa dizer:
 - Gabriela tem a probabilidade 0,85 de ser alta.

Não se faz a menor ideia da altura de Gabriela, pois ela pode nem ter nascido, pois ela apenas tem 85% de chance de ser alta.

1 – Lógica Fuzzy

1.3 – Vantagens e Desvantagens:

- **Vantagens:**
 - Facilidade de lidar com dados imprecisos.
 - Facilita as descrições das regras pelos especialistas.
 - Diminuição da quantidade de regras.
 - Permite a explicação do raciocínio.

1 – Lógica Fuzzy

1.3 – Vantagens e Desvantagens:

- **Desvantagens:**
 - Necessidade de especificar funções de pertinência.
 - Necessidade de especialista do domínio.
 - Necessidade de conhecimento de dados históricos.

2

Operações com Conjuntos *Fuzzy*

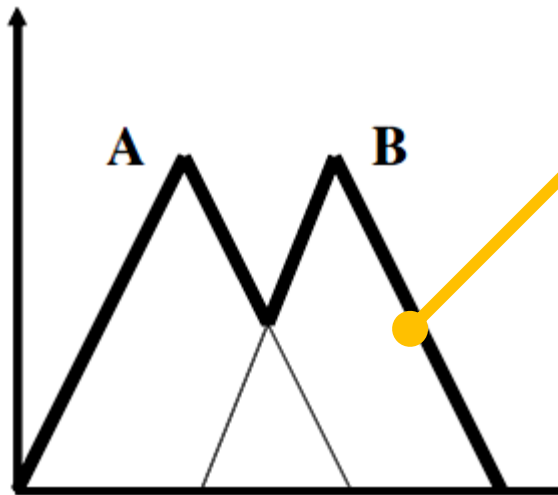
2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.1 – Operadores *Fuzzy*:

Dados 2 conjuntos *Fuzzy*, A e B , temos:

a) **União** ou **Disjunção** (OU lógico):

$$\mu_{(A \cup B)}(x) = \mu_{(A+B)}(x) = \text{máximo} \{ \mu_{(A)}(x) , \mu_{(B)}(x) \}$$



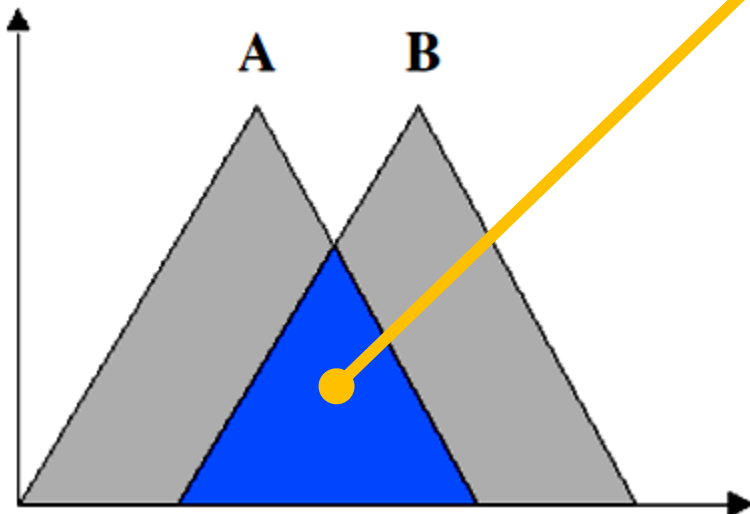
2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.1 – Operadores *Fuzzy*:

Dados 2 conjuntos *Fuzzy*, A e B , temos:

b) **Interseção** ou **Conjunção** (E lógico):

$$\mu_{(A \cap B)}(x) = \mu_{(A.B)}(x) = \text{mínimo} \{ \mu_{(A)}(x), \mu_{(B)}(x) \}$$



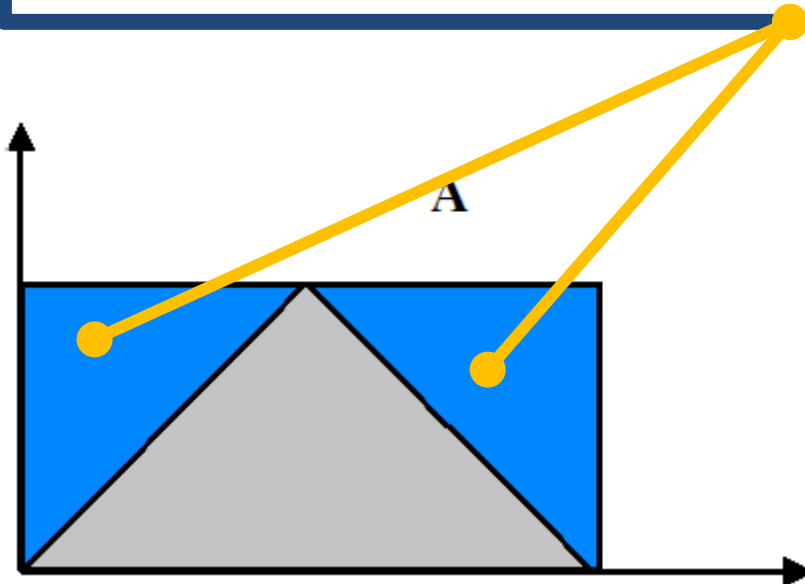
2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.1 – Operadores *Fuzzy*:

Dados 2 conjuntos *Fuzzy*, A e B , temos:

c) **Negação** ou **Complemento** (Não lógico):

$$\neg \mu_{(A)}(x) = 1 - \mu_{(A)}(x)$$



2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.1 – Operadores *Fuzzy*:

Dados 2 conjuntos *Fuzzy*, A e B , temos:

d) **Condicional** (Se..então lógico):

$$a \rightarrow b \leftrightarrow \neg a + b$$

$$\mu_{(A \rightarrow B)}(x) = \text{máximo} \{ 1 - \mu_{(A)}(x), \mu_{(B)}(x) \}$$

Ou ainda, aplicando De Morgan:

$$a \rightarrow b \leftrightarrow \neg(a \cdot \neg b)$$

$$\mu_{(A \rightarrow B)}(x) = 1 - \text{mínimo} \{ \mu_{(A)}(x), 1 - \mu_{(B)}(x) \}$$

2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.1 – Operadores *Fuzzy*:

Dados 2 conjuntos *Fuzzy*, A e B , temos:

e) **Ou Exclusivo (Xor)**:

$$a \oplus b \rightarrow \neg (a \leftrightarrow b)$$

$$a \oplus b \rightarrow \neg ((a \rightarrow b) \wedge (a \leftarrow b))$$

$$\mu_{(A \oplus B)}(x) = 1 - (\text{mínimo} \{ \text{máximo} \{ 1 - \mu_{(A)}(x), \mu_{(B)}(x) \}, \text{máximo} \{ 1 - \mu_{(B)}(x), \mu_{(A)}(x) \} \})$$

2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*:

Modificadores Linguísticos:

Utilizados para representar conceitos causadores de ambiguidades:

a) **Muito:** $\mu^2_{(A)}(x)$

b) **Pouco:** $\sqrt[2]{\mu_{(A)}(x)}$

c) **Extremamente:** $\mu^3_{(A)}(x)$

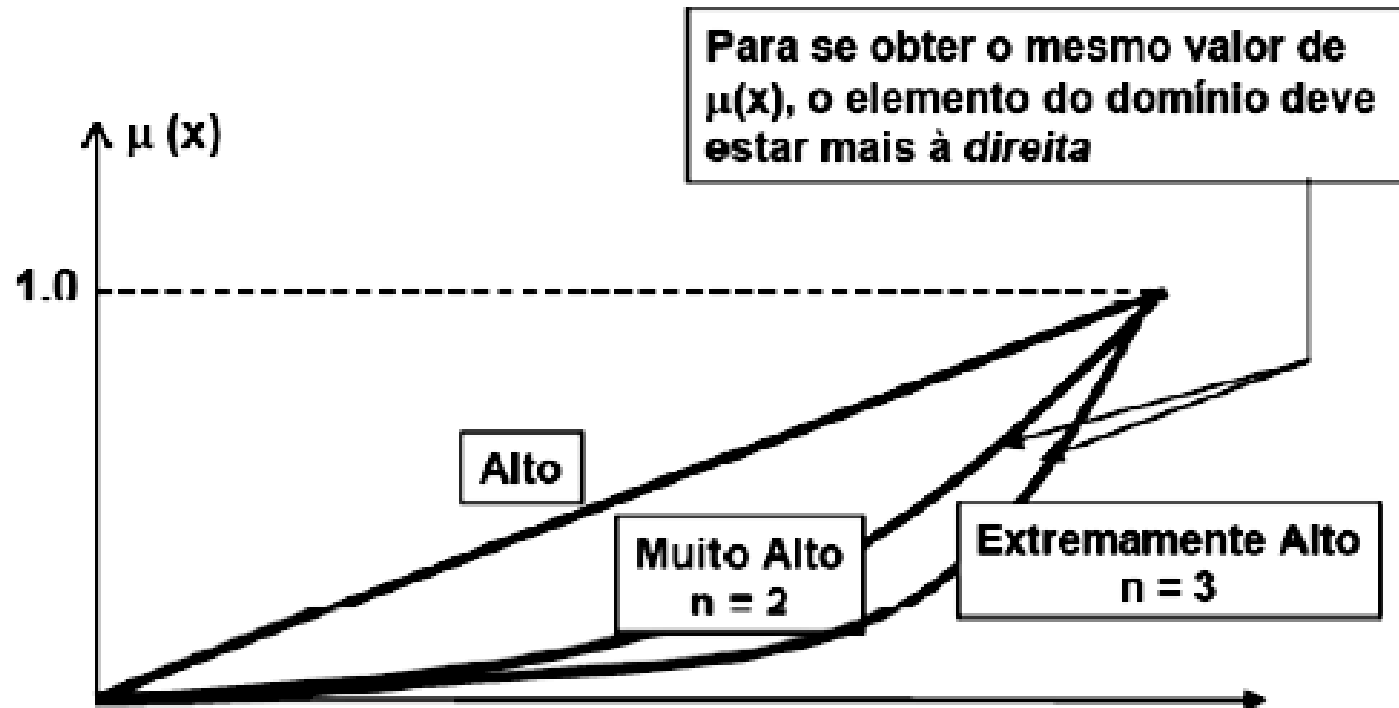
d) **Mais ou Menos:** $\sqrt[3]{\mu_{(A)}(x)}$

2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*:

Modificadores Linguísticos:

Exemplo 1:

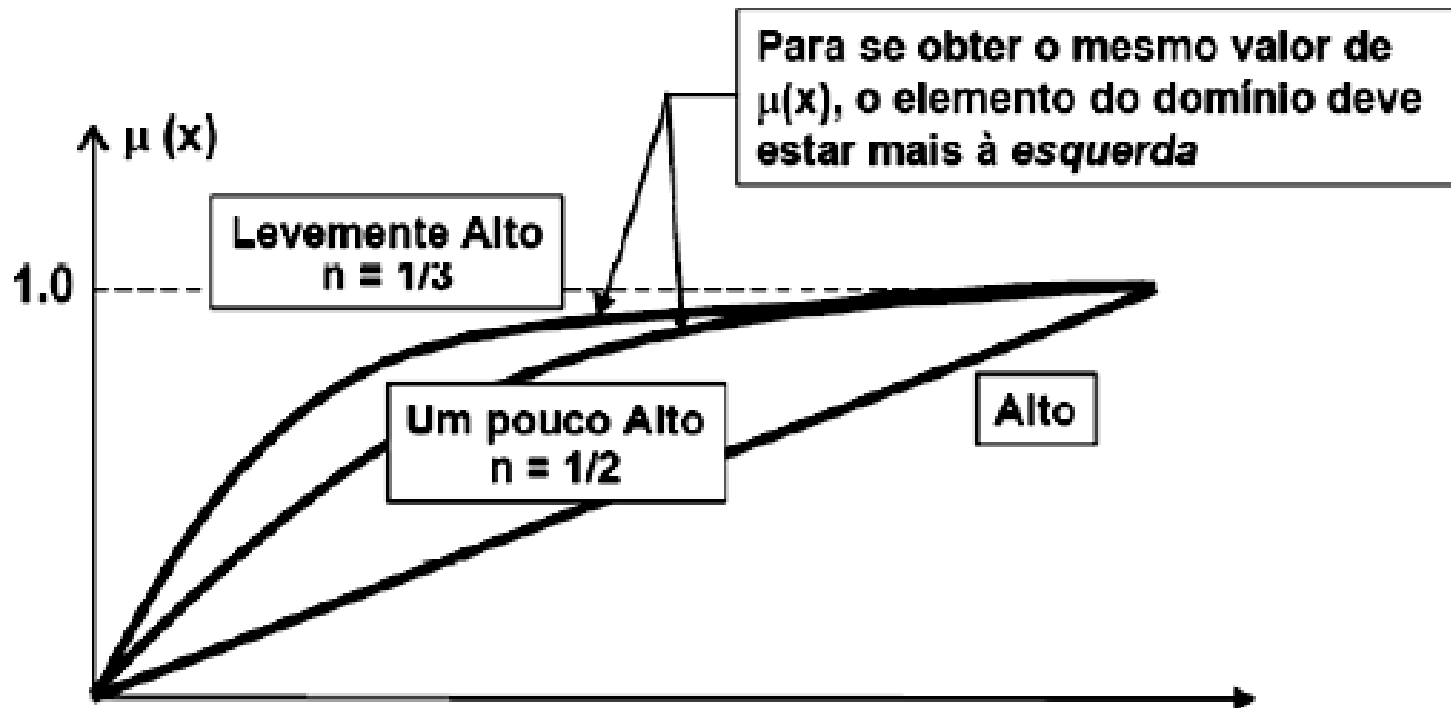


2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*:

Modificadores Linguísticos:

Exemplo 2:



2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*:

Variáveis Linguísticas:

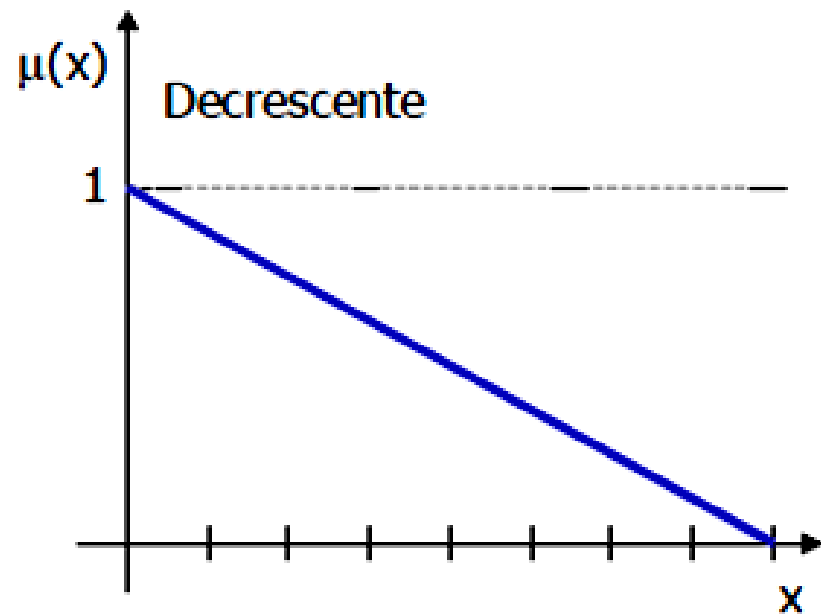
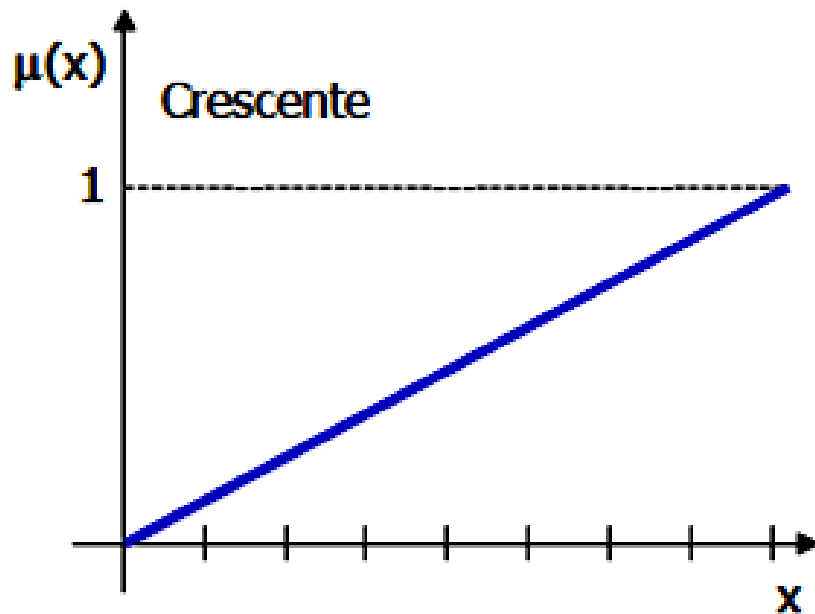
- Permitem que a linguagem da modelagem *Fuzzy* expresse a semântica usada por especialistas.
- São os qualificadores.
- Encapsula conceitos imprecisos numa forma computacionalmente eficiente.
- Têm a função de fornecer uma maneira sistemática para a caracterização aproximada de fenômenos complexos ou mal definidos. São os nomes dos conjuntos *Fuzzy*.

2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.3 – Formato de Conjuntos *Fuzzy*:

a) Linear Crescente e Decrescente:

São os tipos mais simples.

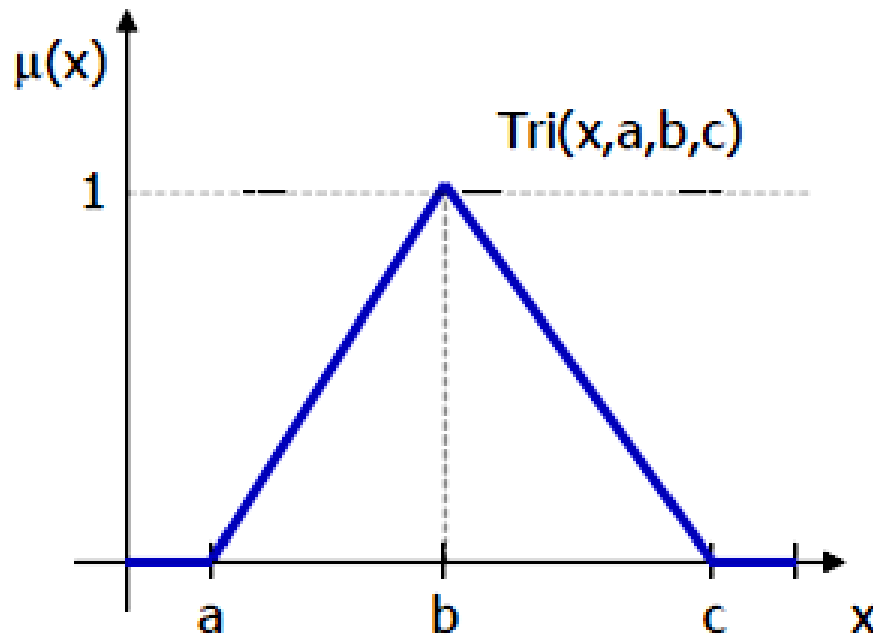


2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.3 – Formato de Conjuntos *Fuzzy*:

b) Triangular:

Caso especial, derivado do tipo linear.



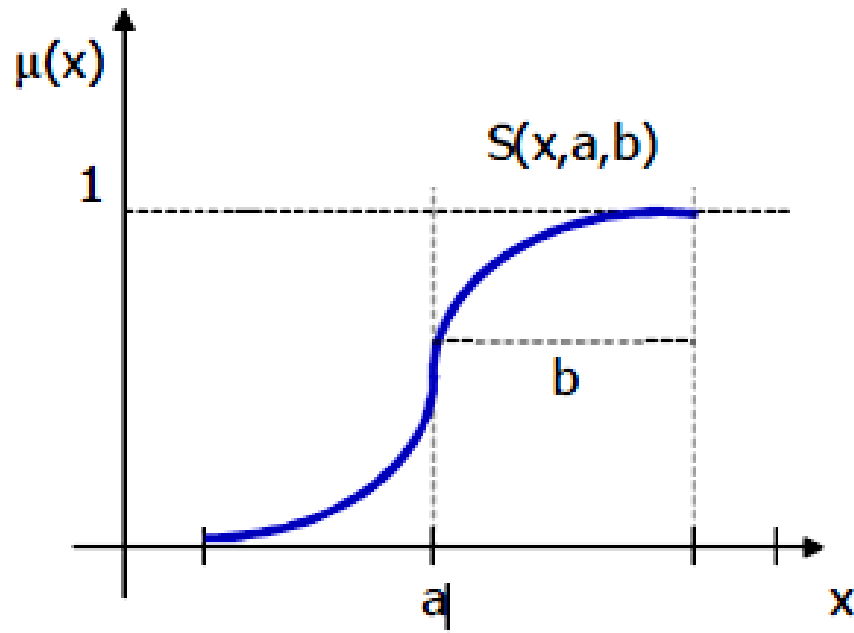
$$\text{Tri}(x, a, b, c) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ 1 - (b - x) / (b - a) & a < x \leq b \\ (c - x) / (c - b) & b < x \leq c \\ 0 & x > c \end{cases}$$

2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.3 – Formato de Conjuntos *Fuzzy*:

c) Formato S:

Equação Quadrática.



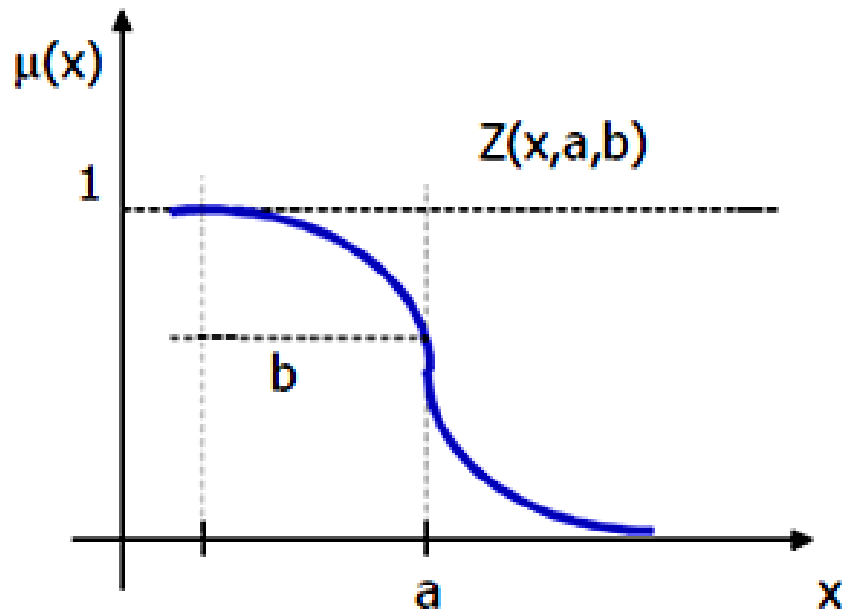
$$S(x, a, b) = \begin{cases} 0 & x \leq a - b \\ [x - (a - b)]^2 / 2b^2 & a - b < x \leq a \\ 1 - [(a + b) - x]^2 / 2b^2 & a < x \leq a + b \\ 1 & x > a + b \end{cases}$$

2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.3 – Formato de Conjuntos *Fuzzy*:

d) Formato Z :

Complemento do Formato S : $Z(x,a,b) = 1 - S(x,a,b)$



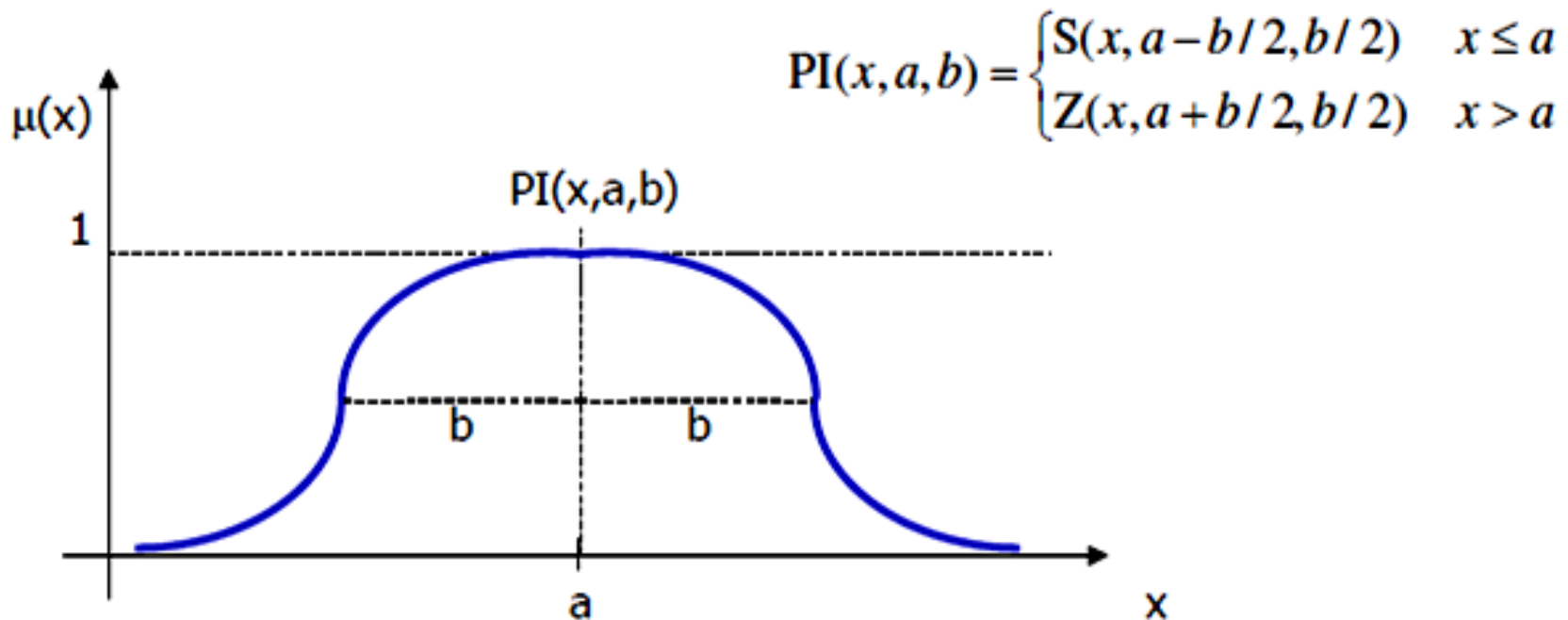
$$Z(x,a,b) = \begin{cases} 1 & x \leq a-b \\ 1 - [x - (a-b)]^2 / 2b^2 & a-b < x \leq a \\ [(a+b) - x]^2 / 2b^2 & a < x \leq a+b \\ 0 & x > a+b \end{cases}$$

2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.3 – Formato de Conjuntos *Fuzzy*:

e) Formato *Pi*:

Junção das curvas *S* e *Z*.

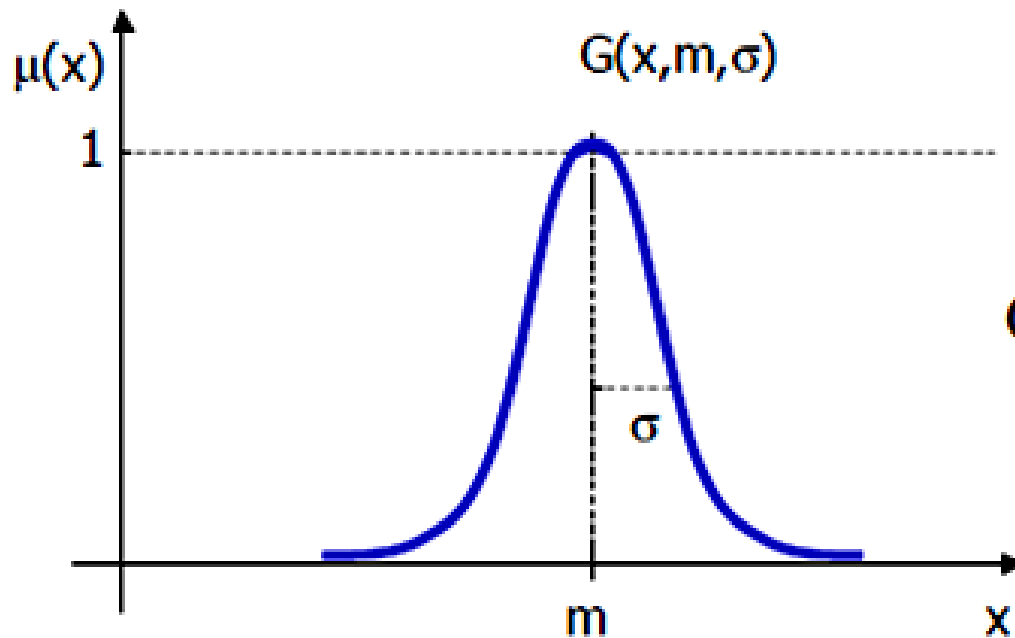


2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.3 – Formato de Conjuntos *Fuzzy*:

f) Gaussiana:

Simétrica, radial e unimodal.



$$G(x, m, \sigma) = \exp\left(\frac{-(x - m)^2}{\sigma^2}\right)$$

2 – Operações com Conjuntos *Fuzzy*

2.4 – Defuzificação:

- Transforma o valor *fuzzy* em um valor relativo à realidade.
- Deve ser também especificado por especialista do domínio.
- Principais modelos de defuzificação:
 - Método do **Critério Máximo**
 - Método da **Média dos Máximos**
 - Método do **Centro Geométrico**

3

Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.1 – Aplicando Operadores e Formatos:

Exemplo 1: Quem é alto e de meia idade?

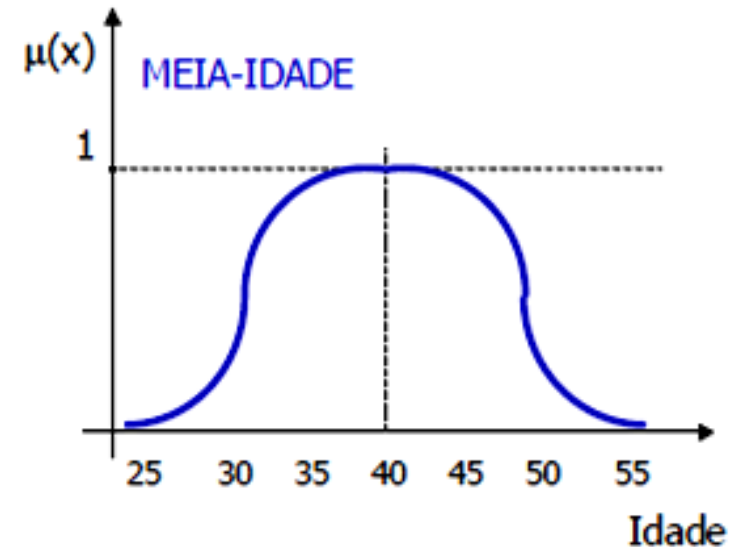
Nome	Idade	Altura
Abel	36	1.70
Marcelo	58	1.75
Carlos	64	1.65
João	32	1.78
Pedro	40	1.77
Tiago	22	1.60
Felipe	47	1.73
André	25	1.75

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.1 – Aplicando Operadores e Formatos:

Exemplo 1: Quem é alto e de meia idade?

Nome	Idade	$\mu_{MI}(x)$	Altura
Abel	36	0.83	1.70
Marcelo	58	0.00	1.75
Carlos	64	0.00	1.65
João	32	0.47	1.78
Pedro	40	1.00	1.77
Tiago	22	0.00	1.60
Felipe	47	0.74	1.73
André	25	0.10	1.75

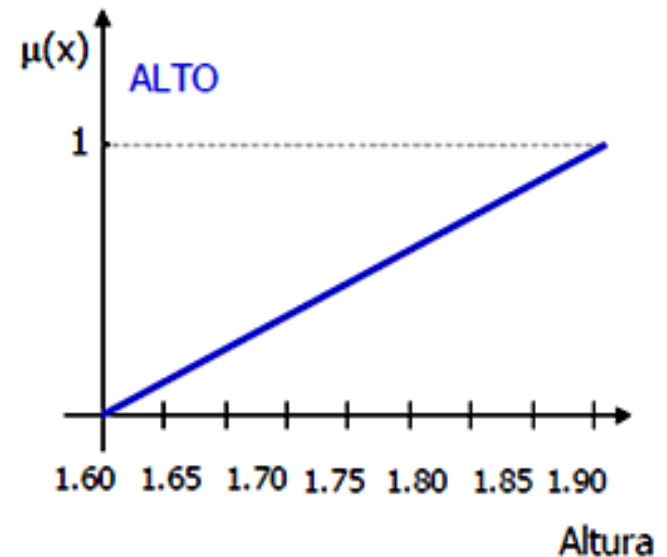


3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.1 – Aplicando Operadores e Formatos:

Exemplo 1: Quem é alto e de meia idade?

Nome	Idade	$\mu_{MI}(X)$	Altura	$\mu_{ALTO}(X)$
Abel	36	0.83	1.70	0.44
Marcelo	58	0.00	1.75	0.64
Carlos	64	0.00	1.65	0.23
João	32	0.47	1.78	0.70
Pedro	40	1.00	1.77	0.69
Tiago	22	0.00	1.60	0.13
Felipe	47	0.74	1.73	0.62
André	25	0.10	1.75	0.64



3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.1 – Aplicando Operadores e Formatos:

Exemplo 1: Quem é alto E de meia idade?

Nome	Idade	$\mu_{MI}(x)$	Altura	$\mu_{ALTO}(x)$
Abel	36	0.83	1.70	0.44
Marcelo	58	0.00	1.75	0.64
Carlos	64	0.00	1.65	0.23
João	32	0.47	1.78	0.70
Pedro	40	1.00	1.77	0.69
Tiago	22	0.00	1.60	0.13
Felipe	47	0.74	1.73	0.62
André	25	0.10	1.75	0.64

$$\mu_{(A \cap B)}(x) = \text{mínimo} \{ \mu_{(MeiaIdade)}(x) , \mu_{(Alto)}(x) \}$$

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.1 – Aplicando Operadores e Formatos:

Exemplo 1: Quem é alto E de meia idade?

Nome	Idade	$\mu_{MI}(x)$	Altura	$\mu_{ALTO}(x)$	Fuzzy
Abel	36	0.83	1.70	0.44	0.44
Marcelo	58	0.00	1.75	0.64	0.00
Carlos	64	0.00	1.65	0.23	0.00
João	32	0.47	1.78	0.70	0.47
Pedro	40	1.00	1.77	0.69	0.69
Tiago	22	0.00	1.60	0.13	0.00
Felipe	47	0.74	1.73	0.62	0.62
André	25	0.10	1.75	0.64	0.10

$$\mu_{(A \cap B)}(x) = \text{mínimo} \{ \mu_{(MeiaIdade)}(x) , \mu_{(Alto)}(x) \}$$

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.1 – Aplicando Operadores e Formatos:

Exemplo 1: Quem é alto E de meia idade?

Nome	Idade	$\mu_{MI}(X)$	Altura	$\mu_{ALTO}(X)$	Fuzzy
Abel	36	0.83	1.70	0.44	0.44
Marcelo	58	0.00	1.75	0.64	0.00
Carlos	64	0.00	1.65	0.23	0.00
João	32	0.47	1.78	0.70	0.47
Pedro	40	1.00	1.77	0.69	0.69
Tiago	22	0.00	1.60	0.13	0.00
Felipe	47	0.74	1.73	0.62	0.62
André	25	0.10	1.75	0.64	0.10

Resposta: Abel, João, Pedro, Felipe e André.

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.1 – Aplicando Operadores e Formatos:

Exemplo 2: Quem é alto OU de meia idade?

Nome	Idade	$\mu_{MI}(x)$	Altura	$\mu_{ALTO}(x)$
Abel	36	0.83	1.70	0.44
Marcelo	58	0.00	1.75	0.64
Carlos	64	0.00	1.65	0.23
João	32	0.47	1.78	0.70
Pedro	40	1.00	1.77	0.69
Tiago	22	0.00	1.60	0.13
Felipe	47	0.74	1.73	0.62
André	25	0.10	1.75	0.64

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.1 – Aplicando Operadores e Formatos:

Exemplo 2: Quem é alto OU de meia idade?

Nome	Idade	$\mu_{MI}(x)$	Altura	$\mu_{ALTO}(x)$
Abel	36	0.83	1.70	0.44
Marcelo	58	0.00	1.75	0.64
Carlos	64	0.00	1.65	0.23
João	32	0.47	1.78	0.70
Pedro	40	1.00	1.77	0.69
Tiago	22	0.00	1.60	0.13
Felipe	47	0.74	1.73	0.62
André	25	0.10	1.75	0.64

$$\mu_{(A \cup B)}(x) = \text{máximo}\{ \mu_{(MeiaIdade)}(x) , \mu_{(Alto)}(x) \}$$

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.1 – Aplicando Operadores e Formatos:

Exemplo 2: Quem é alto OU de meia idade?

Nome	Idade	$\mu_{MI}(x)$	Altura	$\mu_{ALTO}(x)$	Fuzzy
Abel	36	0.83	1.70	0.44	0.83
Marcelo	58	0.00	1.75	0.64	0.64
Carlos	64	0.00	1.65	0.23	0.23
João	32	0.47	1.78	0.70	0.70
Pedro	40	1.00	1.77	0.69	1.00
Tiago	22	0.00	1.60	0.13	0.13
Felipe	47	0.74	1.73	0.62	0.74
André	25	0.10	1.75	0.64	0.64

$$\mu_{(A \cup B)}(x) = \text{máximo}\{ \mu_{(MeiaIdade)}(x) , \mu_{(Alto)}(x) \}$$

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.1 – Aplicando Operadores e Formatos:

Exemplo 2: Quem é alto OU de meia idade?

Nome	Idade	$\mu_{MI}(x)$	Altura	$\mu_{ALTO}(x)$	Fuzzy	
Abel	36	0.83	1.70	0.44	0.83	←
Marcelo	58	0.00	1.75	0.64	0.64	←
Carlos	64	0.00	1.65	0.23	0.23	←
João	32	0.47	1.78	0.70	0.70	←
Pedro	40	1.00	1.77	0.69	1.00	←
Tiago	22	0.00	1.60	0.13	0.13	←
Felipe	47	0.74	1.73	0.62	0.74	←
André	25	0.10	1.75	0.64	0.64	←

Resposta: Todos.

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.1 – Composição por Produto Cartesiano:

- Para encontrar respostas para relações entre conjuntos *Fuzzy*, é bastante usual utilizar a composição por produto cartesiano entre matrizes.
- Efetua-se a multiplicação entre as matrizes relacionais, substituindo cada **multiplicação** pela operação **mínimo** e cada **adição** pela operação **máximo**.

$$\mu_{(A \circ B)}(a, c) = \text{máximo} \{ \text{mínimo} \{ \mu_{(A)}(a, b), \mu_{(B)}(b, c) \} \}$$

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.2 – Composição por Produto Cartesiano:

Exemplo 1: Qual a relação entre Ventilador, Casaco e Guarda-chuva, com as estações do ano?

R1(U1,U2)	Frio	Calor
Primavera	0,3	0,6
Verão	0,1	1
Outono	0,7	0,5
Inverno	1	0,2

R2(U2,U3)	Ventilador	Casaco	Guarda-chuva
Frio	0,1	0,9	0,5
Calor	1	0,2	0,7

$$\begin{matrix} & \mathbf{R1} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0,3} & \mathbf{0,6} \\ 0,1 & 1 \\ 0,7 & 0,5 \\ 1 & 0,2 \end{bmatrix} & \circ & \begin{matrix} & \mathbf{R2} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0,1} & 0,9 & 0,5 \\ \mathbf{1} & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \mathbf{R3} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0,63} & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \end{matrix}\end{matrix}$$

Na matemática clássica, temos:

$$A \circ B[1,1] = \mathbf{a[1,1].b[1,1]} + \mathbf{a[1,2].b[2,1]} = \mathbf{0,03} + \mathbf{0,6} = \mathbf{0,63}$$

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.2 – Composição por Produto Cartesiano:

Exemplo 1: Qual a relação entre Ventilador, Casaco e Guarda-chuva, com as estações do ano?

R1(U1,U2)	Frio	Calor
Primavera	0,3	0,6
Verão	0,1	1
Outono	0,7	0,5
Inverno	1	0,2

R2(U2,U3)	Ventilador	Casaco	Guarda-chuva
Frio	0,1	0,9	0,5
Calor	1	0,2	0,7

$$\begin{bmatrix} \text{R1} \\ \mathbf{0,3} & \mathbf{0,6} \\ 0,1 & 1 \\ 0,7 & 0,5 \\ 1 & 0,2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \text{R2} \\ \mathbf{0,1} & 0,9 & 0,5 \\ \mathbf{1} & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{R3} \\ \mathbf{0,6} & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

Na *lógica fuzzy*, temos:

$$\mu_{(A \circ B)}[1,1] = \text{máximo} \{ \text{mínimo} \{ (\mathbf{0.3}, \mathbf{0.1}) \}, \text{mínimo} \{ (\mathbf{0.6}, 1) \} \} = \mathbf{0.6}$$

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.2 – Composição por Produto Cartesiano:

Exemplo 1: Qual a relação entre Ventilador, Casaco e Guarda-chuva, com as estações do ano?

R1(U1,U2)	Frio	Calor
Primavera	0,3	0,6
Verão	0,1	1
Outono	0,7	0,5
Inverno	1	0,2

R2(U2,U3)	Ventilador	Casaco	Guarda-chuva
Frio	0,1	0,9	0,5
Calor	1	0,2	0,7

$$\begin{matrix} & \mathbf{R1} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0,3} & \mathbf{0,6} \\ 0,1 & 1 \\ 0,7 & 0,5 \\ 1 & 0,2 \end{bmatrix} & \circ & \begin{matrix} & \mathbf{R2} \\ \begin{bmatrix} 0,1 & \mathbf{0,9} & 0,5 \\ 1 & \mathbf{0,2} & 0,7 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \mathbf{R3} \\ \begin{bmatrix} 0,6 & \mathbf{0,3} & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \end{matrix}\end{matrix}$$

Na *lógica fuzzy*, temos:

$$\mu_{(A \circ B)}[1,2] = \text{máximo} \{ \text{mínimo} \{ (\mathbf{0.3}, \mathbf{0.9}) \}, \text{mínimo} \{ (\mathbf{0.6}, \mathbf{0.2}) \} \} = \mathbf{0.3}$$

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.2 – Composição por Produto Cartesiano:

Exemplo 1: Qual a relação entre Ventilador, Casaco e Guarda-chuva, com as estações do ano?

R1(U1,U2)	Frio	Calor
Primavera	0,3	0,6
Verão	0,1	1
Outono	0,7	0,5
Inverno	1	0,2

R2(U2,U3)	Ventilador	Casaco	Guarda-chuva
Frio	0,1	0,9	0,5
Calor	1	0,2	0,7

$$\begin{matrix} & \mathbf{R1} \\ \begin{bmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0,1 & 1 \\ 0,7 & 0,5 \\ 1 & 0,2 \end{bmatrix} & \circ & \begin{matrix} & \mathbf{R2} \\ \begin{bmatrix} 0,1 & 0,9 & 0,5 \\ 1 & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \mathbf{R3} \\ \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,6 \\ 1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,5 & 0,7 & 0,5 \\ 0,2 & 0,9 & 0,5 \end{bmatrix} \end{matrix}\end{matrix}$$

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.2 – Composição por Produto Cartesiano:

Exemplo 1: Qual a relação entre Ventilador, Casaco e Guarda-chuva, com as estações do ano?

R1(U1,U2)	Frio	Calor
Primavera	0,3	0,6
Verão	0,1	1
Outono	0,7	0,5
Inverno	1	0,2

R2(U2,U3)	Ventilador	Casaco	Guarda-chuva
Frio	0,1	0,9	0,5
Calor	1	0,2	0,7

$$\begin{matrix} & \mathbf{R3} \\ \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,6 \\ 1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,5 & 0,7 & 0,5 \\ 0,2 & 0,9 & 0,5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

R3(U1,U3)	Ventilador	Casaco	Guarda-chuva
Primavera	0,6	0,3	0,6
Verão	1	0,2	0,7
Outono	0,5	0,7	0,5
Inverno	0,2	0,9	0,5

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.3 – Composição por Produto Cartesiano (Tabelas):

Exemplo 2: Qual jôquei deve ser contratado?

Tabela 1	Peso		Altura		Piloto		Salário	
	Kg	$\mu(\text{leve})$	cm	$\mu(\text{baixo})$	nota	$\mu(\text{piloto})$	R\$ / mês	$\mu(\text{salario})$
Gervásio	85	0,1	130	0,9	10	1	20.000,00	0,5
Anestésio	65	0,7	160	0,5	7	0,7	35.000,00	0,8
Pancárdio	50	0,9	157	0,7	5	0,5	12.000,00	0,2
Chulésio	45	1	162	0,4	8	0,8	27.000,00	0,6

Tabela 2	$\mu(\text{muito_leve})$	$\mu(\text{baixo})$	$\mu(\text{excelente_piloto})$	$\mu(\text{pouco_salário})$
Contratar	0,9	0,7	0,5	0,8

Tabela 1: graus de pertinência em cada componente, de cada jôquei.

Tabela 2: graus de pertinência desejado para a contratação (Regras Fuzzy).

3 – Aplicação da Lógica Fuzzy

3.3 – Composição por Produto Cartesiano (Tabelas):

Exemplo 2: Qual jôquei deve ser contratado?

Tabela 1	Peso		Altura		Piloto		Salário	
	Kg	$\mu(\text{leve})$	cm	$\mu(\text{baixo})$	nota	$\mu(\text{piloto})$	R\$ / mês	$\mu(\text{salario})$
Gervásio	85	0,1	130	0,9	10	1	20.000,00	0,5
Anestésio	65	0,7	160	0,5	7	0,7	35.000,00	0,8
Pancárdio	50	0,9	157	0,7	5	0,5	12.000,00	0,2
Chulésio	45	1	162	0,4	8	0,8	27.000,00	0,6

Tabela 2	$\mu(\text{muito_leve})$	$\mu(\text{baixo})$	$\mu(\text{excelente_piloto})$	$\mu(\text{pouco_salário})$
Contratar	0,9	0,7	0,5	0,8

Tabela 3	Peso	Altura	Piloto	Salário
	$\mu(\text{muito_leve})$	$\mu(\text{baixo})$	$\mu(\text{excelente_piloto})$	$\mu(\text{pouco_salario})$
Gervásio	0,01	0,9	1	0,71
Anestésio	0,49	0,5	0,343	0,89
Pancárdio	0,81	0,7	0,125	0,45
Chulésio	1	0,4	0,512	0,77

$\text{muito_leve} = \text{leve}^2$
 $\text{excelente_piloto} = \text{piloto}^3$
 $\text{pouco_salário} = \text{sqrt}(\text{salário})$

Tabela 3: graus de pertinência de cada jôquei, adaptado à contratação.

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.3 – Composição por Produto Cartesiano (Tabelas):

Exemplo 2: Qual jôquei deve ser contratado?

$$\mu_{(\text{contratar})}(\text{jôquei}) = \text{máx} \{ \text{mín} \{ \mu_{(\text{peso})}; \mu_{(\text{altura})}; \mu_{(\text{piloto})}; \mu_{(\text{salário})} \} \}$$

Gervásio	Jôquei	Contrato	Min
Peso	0,01	0,90	0,01
Altura	0,90	0,70	0,70
Piloto	1,00	0,50	0,50
Salário	0,71	0,80	0,71
$\mu_{(\text{contratar})} =$		Máx	0,71

Anestésio	Jôquei	Contrato	Min
Peso	0,49	0,90	0,49
Altura	0,50	0,70	0,50
Piloto	0,34	0,50	0,34
Salário	0,89	0,80	0,80
$\mu_{(\text{contratar})} =$		Máx	0,80

Pancário	Jôquei	Contrato	Min
Peso	0,81	0,90	0,81
Altura	0,70	0,70	0,70
Piloto	0,13	0,50	0,13
Salário	0,45	0,80	0,45
$\mu_{(\text{contratar})} =$		Máx	0,81

Chulésio	Jôquei	Contrato	Min
Peso	1,00	0,90	0,90
Altura	0,40	0,70	0,40
Piloto	0,51	0,50	0,50
Salário	0,77	0,80	0,77
$\mu_{(\text{contratar})} =$		Máx	0,90

3 – Aplicação da Lógica *Fuzzy*

3.3 – Composição por Produto Cartesiano (Tabelas):

Exemplo 2: Qual jóquei deve ser contratado?

$$\mu_{(\text{contratar})}(\text{jóquei}) = \text{máx} \{ \text{mín} \{ \mu_{(\text{peso})}; \mu_{(\text{altura})}; \mu_{(\text{piloto})}; \mu_{(\text{salário})} \} \}$$

$$\mu_{(\text{contratar})}(\text{Gervásio}) = \text{máx} \{ \text{mín} \{ 0.01; 0.7; 0.5; 0.71 \} \} = 0.71$$

$$\mu_{(\text{contratar})}(\text{Anestésio}) = \text{máx} \{ \text{mín} \{ 0.49; 0.5; 0.34; 0.8 \} \} = 0.8$$

$$\mu_{(\text{contratar})}(\text{Pancário}) = \text{máx} \{ \text{mín} \{ 0.81; 0.7; 0.13; 0.45 \} \} = 0.81$$

$$\mu_{(\text{contratar})}(\text{Chulésio}) = \text{máx} \{ \text{mín} \{ 0.9; 0.4; 0.5; 0.77 \} \} = 0.9$$

$$\text{Deve-se contratar} = \text{máx} \{ \mu_{(\text{contratar})}(\text{jóquei}) \} = 0,9 = \text{Chulésio}$$

“ Na medida em que a complexidade de um sistema aumenta, nossa habilidade de fazer afirmações precisas e ainda significativas sobre seu comportamento diminui, até um limiar em que a precisão e a significância (relevância) tornam-se características praticamente exclusivas mutuamente”.

[Zadeh, em “O Princípio da Incompatibilidade”, 1973]

Bibliografias

1. ROSA, João Luis Garcia. **Fundamentos da Inteligência Artificial**. 1ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
2. ARTERO, Almir Olivette. **Inteligência Artificial: Teórica e Prática**. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
3. SIMÕES, Marcelo Godoy; SHAW, Ian S. **Controle e Modelagem Fuzzy**. 2ª ed. São Paulo: Blusher Fapesp, 2007.
4. NASCIMENTO JR., Cairo Lúcio; YONEYAMA, Takashi. **Inteligência Artificial em Controle e Automação**. 2ª ed. São Paulo: Blusher Fapesp, 2004.

Outras Referências

1. THOMAZ, Carlos E. **Inteligência Computacional**. Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Universitário da FEI, 2010.
2. BARRETO, Guilherme de Alencar. **Redes Neurais Artificiais: Conjuntos Fuzzy e Redes RBF**. Departamento de Engenharia de Teleinformática da Universidade Federal do Ceará, 2008.
3. GOMIDE, Fernando. **Sistemas Fuzzy**. DCA-FEEC-Unicamp, <http://www.dca.fee.unicamp.br/~gomide/courses/EA072/transp/EA072SistemasFuzzy7.2.pdf>